MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Soit $\varphi\colon G \to G'$ un homomorphisme des groupes. Supposons que G et G' sont groupes finis. Montrer que :
- $|\mathrm{im}(\varphi)| < \infty$,
- $|\mathrm{im}(\varphi)|$ divise $|G'|$

(2) Soit $\varphi\colon G \to G'$ un homomorphisme des groupes. Si $|G|$ est un nombre premier montrer que φ est soit trivial, soit injectif.

(3) On considère le groupe $\mathfrak{S}_n$; où $n \in \mathbf{N}$.
- Montrer que chaque élément σ de $\mathfrak{S}_n$ peut être écrit comme un produit des transpositions. Indication: Rappelere qu'une transposition est un élément de la forme $(i\,j)$.
- Pour un élément σ de $\mathfrak{S}_n$, on définit $\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^k$ quand $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ où τ_i sont transpositions. Montrer que $\mathrm{sgn}(\sigma)$ est bien définié. Indication: En effet, on dit qu'un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est pair (resp. impair) si $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ (resp. -1).
- Montrer que l'application $\mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ définié par $\sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$ est un homomorphisme. Noyau de ce homomorphisme est définie comme le *groupe alterné*.

(4) Soient $\varphi\colon G \to G'$ et $\psi\colon G' \to G''$ deux homomorphismes.
- Montrer que $\psi \circ \varphi\colon G \to G''$ est un homomorphisme, aussi.
- Montrer que si φ est un isomorphisme, alors $\varphi^{-1}\colon G' \to G$ est un homomorphisme, aussi.

(5) Déterminer tout les homomorphismes entre
- $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$

(6) Soit G un groupe quelconque. Considerons l'ensemble, $\mathrm{Aut}(G)$, de tout les automorphismes de G.
- Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe sous la composition.
- Pour $g_o \in G$ fixé, on définit une application :

$$\begin{aligned} \varphi_{g_o}\colon G &\to G \\ x &\mapsto g_o^{-1} x g_o \end{aligned}$$

  Montrer que $\varphi_{g_o} \in \mathrm{Aut}(G)$.
- Montrer que l'application $\psi G \to \mathrm{Aut}(G)$ définié par $\psi(g) = \varphi_{g_o}$ est un homomorphisme.
- Montrer que la partie $\mathrm{Inn}(G) = \{\varphi_{g_o} \in \mathrm{Aut}(G) \,|\, g_o \in G\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.

(7) Soit $G = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.
- Montrer que $S^1 = \{x + y\sqrt{-1} \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ est un sous groupe distingué de G.
- Montrer que la quotient $G/S^1 \cong \mathbf{R}_{\geq 0}$.

(8) Soient $\varphi\colon G \to G'$ un homomorphisme, H un sous groupe de G et H' un sous-groupe de G'.
- Montrer que $\varphi(H)$ est un sous-groupe de G'.
- Montrer que $\varphi^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.
- Montrer que si H est un sous-groupe distingué alors $\varphi(H)$ est distingué (de G').
- Montrer que si H' est un sous-groupe distingué alors $\varphi^{-1}(H')$ est distingué (de G).

(9) Entre les groupes suivantes, déterminer un homomorphisme non-trivial et déterminer $\mathrm{im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$:
- $\varphi\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$
- $\varphi\colon \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$
- $\varphi\colon \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_4$