MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Supposons que G agit sur un ensemble $X \neq \emptyset$. Soit $Y \subset X$ une partie non-vide.
- ▶ Montrer que $\mathrm{Stab}(Y) := \{g \in G \mid g \cdot y = y \text{ pour tout } y \in Y\}$ est un sous-groupe de G.
- ▶ Montrer que $\mathrm{Stab}(Y) = \bigcap_{y \in Y} \mathrm{Stab}(y)$.
- ▶ Montrer que $\mathrm{Stab}(X)$ est un sous-groupe distingue de G.

(2) Soient $G = (\mathbf{R}, +)$ et $X = \mathbf{R}^2$.
- ▶ Montrer que l'application
$$\bullet \colon G \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$\left(g, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto g \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(g) & -\sin(g) \\ \sin(g) & \cos(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
définit une action de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^2$.
- ▶ Déterminer l'orbite de $(0, 0)$.
- ▶ Déterminer l'orbite de $(1, 0)$.
- ▶ Décrire géométriquement l'orbite de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- ▶ Déterminer le stabilizateur de $(0, 0)$.
- ▶ Déterminer le stabilizateur de $(1, 0)$.
- ▶ Déterminer le stabilizateur de $(-1, 0)$.
- ▶ Trouver un élément $g \in \mathbf{R}$ tel que $g \bullet (1, 0) = (-1, 0)$ et établir l'isomorphisme entre $\mathrm{Stab}((1, 0))$ et $\mathrm{Stab}((-1, 0))$ induit par g.
- ▶ Déterminer le stabilizateur d'un élément $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ quelconque.

(3) Supposons que G agit sur un ensemble $X \neq \emptyset$.
- ▶ Montrer que si l'action est transitive alors pour un $x \in X$ quelconque l'orbite de x est X.
- ▶ On dit que G agit *fidèlement* sur X si on a :
$$\text{pour tout } x \in X \text{ si } g \bullet x = x \text{ alors } g = e.$$
Montrer que si l'action est fidèle alors la représentation symmétrique est injective.

(4) Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Par $\mathrm{Sub}(G)$ on note l'ensemble de sous-groupes de G.
- ▶ Pour $g \in G$ quelconque montrer que la partie $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \colon h \in H\}$ est un sous-groupe de G, aussi.
- ▶ Montrer que l'application
$$\bullet \colon G \times \mathrm{Sub}(G) \to \mathrm{Sub}(G)$$
$$(g, H) \mapsto g^{-1}Hg$$
définit une action de G sur $\mathrm{Sub}(G)$.
- ▶ Déterminer $\mathrm{Stab}(\{e\})$ et $\mathrm{Stab}(G)$.

(5) Pour $G = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ on considère l'action de G sur $\mathrm{Sub}(G)$ comme décrit dans Exercice 4.
- ▶ Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle \overline{1} \rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle \overline{1} \rangle)| = [\langle \overline{1} \rangle]$.
- ▶ Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle \overline{2} \rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle \overline{2} \rangle)| = [\langle \overline{2} \rangle]$.
- ▶ Expliciter la représentation symmétrique de cette action.
- ▶ Est-ce que l'action soit fidèle? Est-elle transitive?

(6) Pour $G = \mathfrak{S}_3$ on considère l'action de G sur $\mathrm{Sub}(G)$ comme décrit dans Exercice 4.
- ▶ Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle (1\,2\,3) \rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle (1\,2\,3) \rangle)| = [\langle (1\,2\,3) \rangle]$.
- ▶ Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle (1\,2) \rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle (1\,2) \rangle)| = [\langle (1\,2) \rangle]$.

- ► Déterminer le stabilizateur de $\langle(2\,3)\rangle$.
- ► Trouver un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que $\sigma \bullet \langle(1\,2)\rangle = \langle(2\,3)\rangle$ et et établir l'isomorphisme entre $\mathrm{Stab}((1,0))$ et $\mathrm{Stab}((-1,0))$ induit par σ.
- ► Expliciter la représentation symmétrique de cette action.
- ► Est-ce que l'action soit fidèle? Est-elle transitive?

(7) Pour $G = D_{2\cdot 4}$ on considère l'action de G sur $\mathrm{Sub}(G)$ comme décrit dans Exercice 4.
- ► Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle\rho\rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle\rho\rangle)| = [\langle\rho\rangle]$.
- ► Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle\sigma\rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle\sigma\rangle)| = [\langle\sigma\rangle]$.
- ► Déterminer le stabilizateur de $\langle\sigma\rho\rangle$.
- ► Trouver un élément $g \in D_{2\cdot 4}$ tel que $g \bullet \langle\sigma\rangle = \langle\sigma\rho\rangle$ et et établir l'isomorphisme entre $\mathrm{Stab}(\langle\sigma\rangle)$ et $\mathrm{Stab}(\langle\sigma\rho\rangle)$ induit par g.
- ► Expliciter la représentation symmétrique de cette action.
- ► Est-ce que l'action soit fidèle? Est-elle transitive?

(8) Pour $G = D_{2\cdot 5}$ on considère l'action de G sur $\mathrm{Sub}(G)$ comme décrit dans Exercice 4.
- ► Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle\rho\rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle\rho\rangle)| = [\langle\rho\rangle]$.
- ► Déterminer l'orbite et le stabilizateur de $\langle\sigma\rangle$. Verifier la formule : $|G|/|\mathrm{Stab}(\langle\sigma\rangle)| = [\langle\sigma\rangle]$.
- ► Déterminer le stabilizateur de $\langle\sigma\rho\rangle$.
- ► Trouver un élément $g \in D_{2\cdot 5}$ tel que $g \bullet \langle\sigma\rangle = \langle\sigma\rho\rangle$ et établir l'isomorphisme entre $\mathrm{Stab}(\langle\sigma\rangle)$ et $\mathrm{Stab}(\langle\sigma\rho\rangle)$ induit par g.
- ► Expliciter la représentation symmétrique de cette action.
- ► Est-ce que l'action soit fidèle? Est-elle transitive?