MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Dans cette exercice, on va démontrer le théorème de Cauchy : Soit G un groupe fini. Si p est un nombre premier qui divise $|G|$ alors G contient un élément d'ordre p, c'est-à-dire il existe un $g_o \in G$ tel que $\langle g_o \rangle$ est un groupe d'ordre p. Pour ça, on considère l'ensemble :

$$X = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_p = e\}.$$

- ▶ Montrer que la cardinalité de X est $|G|^{p-1}$.
- ▶ On considère l'action de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \langle \overline{1} \rangle$ sur X induit par : $\overline{1} \bullet (x_1, \dots, x_p) := (x_p, x_1, \dots, x_{p-1})$. Montrer qu'on obtient vraiment une action.
- ▶ Montrer que la cardinalité d'un élément de $X/(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est soit 1, soit p.
- ▶ Montrer que $[(e, e, \dots, e)] = \{(e, e, \dots, e)\}$.
- ▶ En considèrant la formule des classes, déduire le théorème de Cauchy.

(2) Soient $A = \{1, 2, \dots, n\}$ et pour un entier naturel $k \leq n$, X_k les parties à k éléments de A, donc X_k contient $\binom{n}{k}$ éléments.

- ▶ Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \bullet \colon \mathfrak{S}_n \times X_k &\to X_k \\ (\sigma, \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) &\mapsto \sigma \bullet \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} := \{\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_k)\} \end{aligned}$$

  définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur X_k.
- ▶ Déterminer le stabilisateur et l'orbite de $\{1, 3, 4\} \in X_3$ sous l'action de $\mathfrak{S}_4$.
- ▶ Déterminer le stabilisateur et l'orbite de $\{1, 3, 4\} \in X_3$ sous l'action de $\mathfrak{S}_5$.
- ▶ Est-ce que l'action transitive?
- ▶ Ëxpliciter la formule des classes pour cette action (c'est-à-dire $|[x_o] = |G|/|\mathrm{Stab}(x_o)|$).

(3) Expliciter (c'est-à-dire déterminer l'homomorphisme, le noyau de l'image) la représentation symmétrique de $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathfrak{S}_6$ induit par l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur lui-même par multiplication a gauche.

(4) Expliciter (c'est-à-dire déterminer l'homomorphisme, le noyau de l'image) la représentation symmétrique de Q_8[1] dans $\mathfrak{S}_8$ induit par l'action de Q_8 sur lui-même par multiplication a gauche.

(5) Expliciter (c'est-à-dire déterminer l'homomorphisme, le noyau de l'image) la représentation symmétrique de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathfrak{S}_3$ dans $\mathfrak{S}_{12}$ induit par l'action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathfrak{S}_3$ sur lui-même par multiplication a gauche.

(6) Expliciter (c'est-à-dire déterminer l'homomorphisme, le noyau de l'image) la représentation symmétrique de $D_{2\cdot 4}$ dans $\mathfrak{S}_8$ induit par l'action de $D_{2\cdot 4}$ sur lui-même par multiplication a gauche.

(7) Soit $G = \mathfrak{S}_4$ et $H = \langle (1\,2), (3\,4) \rangle$.

- ▶ Déterminer l'ensemble G/H. Est-ce que H distingué?
- ▶ Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $(2\,3)H \in G/H$ et vérifier la formule des classes pour l'action de G sur G/H par multiplication.
- ▶ Expliciter (c'est-à-dire déterminer l'homomorphisme, le noyau de l'image) la représentation symmétrique de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathfrak{S}_6$ induit par cette action.

(8) Soit $G = D2 \cdot 4$ et $H = \langle \sigma\rho \rangle$.

- ▶ Déterminer l'ensemble G/H. Est-ce que H distingué?
- ▶ Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $H \in G/H$ et vérifier la formule des classes pour l'action de G sur G/H par multiplication.
- ▶ Expliciter (c'est-à-dire déterminer l'homomorphisme, le noyau de l'image) la représentation symmétrique de $D_{2\cdot 4}$ dans $\mathfrak{S}_4$ induit par cette action.

[1] Rappeler que le groupe $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ avec $ij = jk = ki = 1$ et $ji = kj = ik = -1$.

(9) Soit $G = D2 \cdot 4$ et $H = \langle \rho \rangle$.
- Déterminer l'ensemble G/H. Est-ce que H distingué?
- Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $H \in G/H$ et vérifier la formule des classes pour l'action de G sur G/H par multiplication.
- Expliciter (c'est-à-dire déterminer l'homomorphisme, le noyau de l'image) la représentation symmétrique de $D_{2\cdot 4}$ dans $\mathfrak{S}_2$ induit par cette action.

(10) Déterminer les orbites et stabilisateurs de l'action de
- $D_{2\cdot 4}$ sur lui-même par conjugaison.
- Q_8sur lui-même par conjugaison.
- $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathfrak{S}_3$ sur lui-même par conjugaison.

Pour chaque cas, éxpliciter l'equation aux classes ($|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} \mathcal{K}_i$).

(11) Montrer que le centre de
- $\mathfrak{S}_n = \{(1)\}$, si $n \geq 3$.
- d'un groupe abélien G est G.

(12) Supposons que G est un groupe qui a exactement 2 classes de conjugaison - c'est-à-dire $|G/G| = 2$ où G agit sur lui même par conjugaison. Déterminer G.