# MATH 204
# ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) On fixe un nombre premier $p$ et pose $R_p = \{\frac{a}{b} \in \mathbf{Q} \mid \mathrm{pgcd}(a,b) = 1 \text{ et } p \nmid b\}$.
- Montrer que $R_p$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$.
- Montrer que l'ensemble $\mathfrak{m}_p = \{\frac{a}{b} \in R_p \mid \mathrm{pgcd}(a,b) = 1 \text{ et } p|a\}$ est un idéal de $R_p$.
- Montrer que $R_p/\mathfrak{m}_p \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
- Est-ce que $\mathfrak{m}_p$ est premier? maximal?

(2) Soit $A = F([0,1], \mathbf{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbf{R} \mid f \text{ est continue}\}$ muni des opérations :

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{et} \quad (fg)(t) = f(t)g(t).$$

- Est-ce que $A$ contient diviseurs de zéro?
- Est-ce que $A$ est un corps?
- On définit $I_{1/204} = \{f \in A \mid f(1/204) = 0\}$, Montrer que $I_{1/204}$ est un idéal de $A$.
- Montrer que $A/I_{1/204} \cong \mathbf{R}$
- Est-ce que $I_{1/204}$ premier? maximal?
- Fixons un élément $t_o \in [0,1]$. On définit $I_{t_o} = \{f \in A \mid f(t_o) = 0\}$, Montrer que $I_{t_o}$ est un idéal de $A$.
- Montrer que $A/I_{t_o} \cong \mathbf{R}$
- Est-ce que $I_{t_o}$ est premier? maximal?

(3) Considerons $B = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ et $I = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{Q}$.
- Montrer que $B$ est un sous-anneau de $M(2, \mathbf{Q})$.
- Montrer que $I$ est un idéal de $B$.
- Montrer que $B/I$
- Est-ce que $I$ est premier? maximal?

(4) Soit $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$.
- Montrer que la partie $I = \{(2+\sqrt{-1})x \mid x \in A\}$ est un idéal maximal de $A$.
- Montrer que la partie $\mathfrak{m}_5 = \{a + b\sqrt{-1} \in A \mid 5|a \text{ et } 5|b\}$ est un idéal de $A$.
- Montrer que $\mathfrak{m}_5$ n'est pas maximal.
- Montrer que $A/\mathfrak{m}_5 \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$.
- Montrer que la partie $\mathfrak{m}_3 = \{a + b\sqrt{-1} \in A \mid 3|a \text{ et } 3|b\}$ est un idéal de $A$.
- Montrer que $\mathfrak{m}_3$ est maximal.
- En déduire qu'il existe un corps de cardinalité 9.

(5) Soit $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
- Montrer que la partie $\mathfrak{m} = \{a + b\sqrt{2} \in A \mid 5|a \text{ et } 5|b\}$ est un idéal de $A$.
- Montrer que $\mathfrak{m}$ est maximal.
- En déduire qu'il existe un corps de cardinalité 25.

(6) Soit $A$ un anneau commutatif unitaire quelconque et $a, b \in A$.
- Montrer que l'ensemble $(a,b) := \{ax + by \in A \mid x, y \in A\}$ est un idéal de $A$.
- Plus généralement, montrer que l'ensemble $(a_1, a_2, \ldots, a_k) := \{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in A \mid x_i \in A\}$ est un idéal de $A$. On l'appelle l'idéal engendré par $a_1, \ldots, a_n$.
- Trouver un élément $a \in \mathbf{Z}$ tel que $(a) = (3,7) \subseteq \mathbf{Z}$. Déterminer l'anneau $\mathbf{Z}/(a)$.
- Trouver un élément $b \in \mathbf{Z}$ tel que $(b) = (6,8) \subseteq \mathbf{Z}$. Déterminer l'anneau $\mathbf{Z}/(b)$.
- Trouver un élément $b \in \mathbf{Z}$ tel que $(c) = (12,18) \subseteq \mathbf{Z}$. Déterminer l'anneau $\mathbf{Z}/(c)$.
- Si $p$ est un nombre premier, montrer que l'idéal $(p, X) \subseteq \mathbf{Z}[X]$ est maximal.
- Est-ce que l'idéal $(p, X^2+1) \subseteq \mathbf{Z}[X]$ maximal?, premier?
- Est-ce que l'idéal $(p, X^2-1) \subseteq \mathbf{Z}[X]$ maximal?, premier?

- Trouver un polynôme $a(X) \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $(a(X)) = (X, X^2) \subseteq \mathbf{Q}[X]$. Déterminer l'anneau $\mathbf{Z}/(a(X))$.
- Trouver un polynôme $b(X) \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $(b(X)) = (X^2+1, X^2-1) \subseteq \mathbf{Q}[X]$. Déterminer l'anneau $\mathbf{Q}[X]/(b(X))$.
- Trouver un polynôme $c(X) \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $(c(X)) = (X^3-1, X^2-1) \subseteq \mathbf{Q}[X]$ Déterminer l'anneau $\mathbf{Q}[X]/(c(X))$.

(7) Soit $A = \mathbf{Z}[X]$. Considerons les idéaux $I = (2, X)$ et $J = (3, X)$ dans $\mathbf{Z}[X]$. (voir exercice 6 pour la définition de $(2, X)$)
- Montrer que $IJ = (6, X)$.
- En déduire que $X \neq a(X)b(X)$ pour $a(X) \in I$ et $b(X) \in J$

(8) Soit $A$ un anneau commutatif unitaire.
- Etablir un isomorphisme entre $A$ et $A[X]/(X)$.
- En déduire que $A$ est un anneau intègre si et seulement si $(X)$ est un idéal premier et $A$ est un corps si et seulement si $(X)$ est un idéal maximal.

(9) Soit $A$ un anneau. On dit que $A$ est Boolean si $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.
- Montrer que pour $a \in A$ quelconque $2a = a + a = 0$.
- Montrer que si $P$ est un idéal premier de $A$, alors $P$ est maximal.

(10) Montrer que si $A$ est un anneau intègre de cardinalité fini, alors $A$ est un corps.Indication: Montrer que pour un $a \in A$ fixé l'application $x \mapsto ax$ est une bijection.

(11) Décider si les éléments sont réductibles, irréductibles, premiers dans les anneaux indiqués :
- $X^{14} + 14X^3 + 21X^2$ dans $\mathbf{Z}[X]$
- $X^{14} + 14X^3 + 21X^2 - 49$ dans $\mathbf{Z}[X]$
- $X^n + p$ dans $\mathbf{Q}[X]$; où $p$ un nombre premier, $n \in \mathbf{Z}_{>0}$.
- $X^3 + nX + 2$ dans $\mathbf{Z}[X]$; où $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 1, -3, -5$.
- $X^4 + 1$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]$
- $X^4 + 1$ dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]$
- $X^2 + X + 1$ dans $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[X]$
- $X^2 + X + 1$ dans $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[X]$

(12) Montrer que $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $(\mathbf{Z}/29\mathbf{Z})[X]$.

(13) Montrer que $X^3 - a$ est irréductible dans $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[X]$ quand $a \neq 0, \pm 1$.

(14) Déterminer la factorisation de $X^5 + 1$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]$

(15) Soit $k$ un corps et soit $p(X) \in k[X]$ un polynôme de degre $n > 0$.
- Montrer que $k[X]/(p(X)) = \{a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} \mid a_i \in k \text{ pour tout } i = 0, \ldots, n-1\}$.
- Montrer que si $p(x) = a(X)b(X)$ pour certain $a(X), b(X) \in k[X]$, alors $k[X]/(p(X)) \cong k[X]/(a(X)) \times k[X]/(b(X))$.
- En déduire que si $p(X)$ est réductible, alors $k[X]/(p(X))$ n'est pas un anneau intègre, et donc l'idéal $p(X)$ n'est pas maximal.