Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2018 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Final, 21 Mai 2019 – Ayberk Zeytin
150 mins. Nom & Prénom: ____________________________ ID: __________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	8	12	24	12	32	88
Score:						

Question 1 (8 points)
Soient G, G' deux groupes tels que $|G| = 21$ et $|G'| = 49$. Supposons que tous les sous-groupes de G d'ordre 3 ne sont pas distingués. Montrer que si $\varphi\colon G \to G'$ est un homomorphisme (des groupes) alors φ est trivial.

Question 2 (12 points)

Soit G un groupe qui satisfait : pour tout $g, g' \in \mathsf{G}$ on a $(gg')^n = g^n(g')^n$ pour un entier naturel n fixé. Montrer que

(a) (6 points) $H_1 = \{x^n \mid x \in \mathsf{G}\}$ est un sous-groupe distingué de G.

(b) (6 points) $H_2 = \{x^{n-1} \mid x \in \mathsf{G}\}$ est un sous-groupe distingué de G. (Indication: Montrer que $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$.)

Question 3 (24 points)

Soient G un groupe, H, K deux sous-groupes de G. On définit $\mathsf{HK} = \{hk \in \mathsf{G} \mid h \in \mathsf{H},\ k \in \mathsf{K}\}$.

(a) (6 points) Montrer que l'application $(h, k) \bullet x \mapsto hxk^{-1}$ définit une action de $\mathsf{H} \times \mathsf{K}$ sur HK.

(b) (6 points) Déterminer $\mathrm{Stab}(e)$.

(c) (6 points) Déterminer l'ensemble $\mathsf{HK}/(\mathsf{H} \times \mathsf{K})$.

(d) (6 points) En déduire : $|\mathsf{HK}| = \frac{|\mathsf{H}||\mathsf{K}|}{|\mathsf{H} \cap \mathsf{K}|}$.

Question 4 (12 points)

Soit $\mathsf{p}(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + 1$.

(a) (6 points) Déterminer la factorisation de $\mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + 1$ dans $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})[X]$. En déduire que l'idéal $(\mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + 1)$ n'est pas maximal dans $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})[X]$.

(b) (6 points) Montrer que l'idéal $(\mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + 1)$ est maximal dans $(\mathbf{Z}/17\mathbf{Z})[X]$.

Question 5 (32 points)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux. Si vrai démontrer sinon donner un contre-exemple :

(a) (4 points) Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Si G/H est abélien, alors G est abélien.

V/F ?

(b) (4 points) Si G est un groupe non-abélien et H un sous-groupe, alors H est non-abélien, aussi.

V/F ?

(c) (4 points) Le groupe $(\mathbf{Z}/2017\mathbf{Z})^{\times}$ contient un élément d'ordre 4. (Indication: 2017 est premier.)

V/F ?

(d) (4 points) Les groupes $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ sont isomorphes.

V/F ?

(e) (4 points) Soit A un anneau. Alors, la partie $Z(A) = \{a \in A \mid a \text{ est un diviseur de zéro}\}$ est un sous-anneau de A.

V/F ?

(f) (4 points) Soit A un anneau commutatif unitaire. Si a est irreductible, alors l'idéal (a) est maximal.

V/F ?

(g) (4 points) 5 est réductible dans $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$.

V/F ?

(h) (4 points) Pour A un anneau commutatif, si $p(X), q(X) \in A[X]$ alors $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$.

V/F ?