Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2018 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Partiel 1, 25 Mar. 2019 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ______________________ ID: __________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	30	24	8	16	78
Score:					

Question 1 (30 points)
Soit G un groupe. Pour $\mathsf{g}, \mathsf{h} \in \mathsf{G}$ on définit

$$\mathsf{g} \sim_{\mathsf{R}} \mathsf{h} :\Leftrightarrow \langle \mathsf{g} \rangle = \langle \mathsf{h} \rangle$$

(a) (6 points) Montrer que $\sim_{\mathsf{R}}$ est une relation d'équivalence.

(b) (4 points) Déterminer la classe d'équivalence de $\sqrt{-1} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

(c) (4 points) Déterminer la classe d'équivalence de $2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

(d) (4 points) Déterminer la classe déquivalence d'un élément d'ordre ∞ (G quelconque).

(e) (6 points) Supposons que $g_o \in G$ est un élément d'ordre $n < \infty$. Montrer que $g_o \sim_R g_o^k$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, k) = 1$. (Indication: Utiliser le théorème de Bezout.)

(f) (6 points) Déterminer la classe d'équivalence d'un élément d'ordre fini. En déduire que la classe d'équivalence d'un élément quelconque est fini.

Question 2 (24 points)

Soit $(\mathsf{G}, \cdot)$ un groupe.

(a) (6 points) Montrer que $(\mathsf{G} \times \mathsf{G}, *)$ est un groupe sous l'opération binaire

$$(g_1, g_2) * (g_1, g_2') := (g_1 \cdot g_1', g_2 \cdot g_2').$$

(b) (6 points) Si H, K deux sous-groupes de G montrer que $\mathsf{H} \times \mathsf{K}$ est un sous-groupe de $\mathsf{G} \times \mathsf{G}$

(c) (6 points) Montrer que $\mathsf{D} = \{(\mathsf{g}, \mathsf{g}) \in \mathsf{G} \times \mathsf{G} \mid \mathsf{g} \in \mathsf{G}\}$ est distingué si et seulement si G est abélien.

(d) (6 points) Donner un sous-groupe distingué non-trivial de $\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4$.

Question 3 (8 points)

Supposons que m, n deux entiers naturels tels que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Montrer que $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en utilisant le théorème d'isomorphisme 1.

Question 4 (16 points)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux. Si vrai démontrer sinon donner un contre-exemple :

(a) (4 points) Soient G un groupe infini et H un sous-groupe infini de G. Alors $|\mathsf{G}/\mathsf{H}| < \infty$.
V/F ?

(b) (4 points) Soient G un groupe abélien et $\varphi\colon \mathsf{G} \to \mathsf{G}'$ un epimorphisme. Alors G' est un groupe abélien.
V/F ?

(c) (4 points) Pour G un groupe quelconque, la partie $\mathsf{T}(\mathsf{G}) = \{g \in \mathsf{G} \mid \operatorname{ord}(g) < \infty\}$ est un sous-groupe de G.
V/F ?

(d) (4 points) Les groupes $(\mathbf{Q} \setminus \{0\})$ et $(\mathbf{Q}, +)$ ne sont pas isomorphes.
V/F ?