Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2018 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Partiel 2, 29 Avr. 2019 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ________________________ ID: __________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	26	20	12	32	90
Score:					

Question 1 (26 points)

Considerons l'action de $G = \mathfrak{S}_4$ sur $X = \mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ définié par :

$$\begin{aligned} \bullet \colon \mathfrak{S}_4 \times X &\to X \\ (\sigma, p(x_1, x_2, x_3, x_4)) &\mapsto \sigma \bullet p(x_1, x_2, x_3, x_4) := p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) \end{aligned}$$

Par exemple, $(1\,2\,3) \bullet (x_1 + x_4 + x_2x_3) = x_2 + x_4 + x_3x_1$.

(a) (6 points) Déterminer le stabilizateur de $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2+x_4$. (<u>Indication:</u> $|\mathrm{Stab}(x_2 + x_4)| = 4$.)

(b) (8 points) En utilisant (a) déterminer le stabilizateur de $r(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_4$.

(c) (4 points) Trouver deux polynômes de dégre > 0, disons $a, b \in X$ tels que $\mathrm{Stab}(a) = \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Stab}(b) = \{(1)\}$.

(d) (8 points) Vérifier le lemme d'orbite-stabilizateur pour l'élément $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 + x_1x_3$.

Question 2 (20 points)

Soient $A = M(2, \mathbf{Q})$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in A \,|\, a, b, c \in \mathbf{Q} \right\} \quad \text{et} \quad I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A \,|\, b \in \mathbf{Q} \right\}.$$

(a) (6 points) Montrer que B est un sous-anneau de A.

(b) (6 points) Montrer que I est un idéal de B.

(c) (8 points) Dans l'anneau B/I déterminer si a est inversible ou diviseur de zéro, où :

- $a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I$

- $a = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I$

- $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I$

- $a = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I$

Question 3 (12 points)

Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A.

(a) (6 points) Montrer que si $1 \in I$ alors $A = I$.

(b) (6 points) En déduire que A est un corps si et seulement si les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A. (Indication: Pour un élément $a \in A$, l'ensemble $aA = \{ax \in A \mid x \in A\}$ est un idéal de A.)

Question 4 (32 points)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux. Si vrai démontrer sinon donner un contre-exemple :

(a) (4 points) Supposons que G agit sur un ensemble $\mathsf{X} \neq \emptyset$ oú $|\mathsf{G}| < \infty$ et $|\mathsf{X}| < \infty$. Alors $|\mathsf{X}|/|\mathsf{G}| = |\mathsf{X}/\mathsf{G}|$.

<u>V/F</u> ?

(b) (4 points) Supposons que G agit sur un ensemble $\mathsf{X} \neq \emptyset$. S'il existe $g, g' \in \mathsf{G}$ et $x \in \mathsf{X}$ tels que $g \cdot x = g' \cdot x$, alors $g = g'$

<u>V/F</u> ?

(c) (4 points) Supposons que G agit sur un ensemble $\mathsf{X} \neq \emptyset$. S'il existe $g \in \mathsf{G}$ et $x, y \in \mathsf{X}$ tels que $g \cdot x = g \cdot y$, alors $x = y$.

<u>V/F</u> ?

(d) (4 points) Si A est un anneau, alors $(-a) = -1\, a$ pour tout $a \in \mathsf{A}$.

<u>V/F</u> ?

(e) (4 points) Si A est un anneau, alors $(-a)b = -(ab)$ pour tout $a, b \in A$.
V/F ?

(f) (4 points) Si A est un anneau unitaire, alors $A^\times$ est un sous-anneau de A.
V/F ?

(g) (4 points) Supposons que A est un anneau unitaire. Alors les seuls solutions de l'équation $x^2 = x$ dans A sont 0 et 1.
V/F ?

(h) (4 points) Supposons que A est un anneau et I un idéal de B. Si A est intègre, alors A/I est intègre, aussi.
V/F ?