MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

(1) Montrer que pour $p \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, $B[p, \varepsilon]$ et fermé.

(2) Soient $X_1, \dots, X_n \mathbf{R}^n$ parties non-vides. Montrer que :
- Si X_i sont ouvertes alors $\cup_{i=1}^n X_i$ est ouverte,
- Si X_i sont ouvertes alors $\cap_{i=1}^n X_i$ est ouverte,
- Si X_i sont fermées alors $\cup_{i=1}^n X_i$ est fermé.

(3) Décider si X est ouvert, fermés. Déterminer points d'accumulation, points isolés, $\mathrm{int}(X)$, ∂X et $\mathrm{ext}(X)$; où
- $X = \{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$
- $X = \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
- $X = \cup_{n \in \mathbf{Z}}(n - 1/2, n + 1/2) \subset \mathbf{R}$
- $X = \mathbf{R} \times \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^2$
- $X = \mathbf{R} \times (-1, 1) \subset \mathbf{R}^2$
- $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1\} \setminus \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\} \subset \mathbf{R}^2$
- $X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_i > 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3\} \subset \mathbf{R}^3$
- $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^3$
- $X = \{(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, 0) \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}^3$
- $X = \{(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, e^n) \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}^3$

(4) Déterminer la limite des suites suivantes :
- $(a_n) = (1 + \frac{1}{n})^n$
- $(a_n) = (\int_0^n e^{-t} dt, \sqrt{n^2 + n} - n)$
- $(a_n) = (\frac{1/n - \arctan(1/n)}{\frac{1}{n^3}}, \frac{\sin(1/n) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}})$
- $(a_n) = (\frac{n}{n^3+1}, \tan(\frac{2}{n+1}), \frac{n^2+1}{n})$

(5) Démontrer les proprietes usuelles de la limite, c'est-à-dire pour deux suites (a_n) et (b_n) dans $\mathbf{R}^n$ si $\lim a_n = L$ et $\lim b_n = M$ alors
- $\lim(a_n + b_n) = L + M$
- $\lim(a_n - b_n) = L - M$
- $\lim(a_n b_n) = LM$
- $\lim(a_n / b_n) = L/M$ quand $M \neq 0$

(6) Montrer que les ensembles suivantes sont non-connexes :
- $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$
- $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
- $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
- $\mathbf{R} \times \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}^2$

(7) Montrer que si $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ sont connexes et $X \cap Y$ est non-vide alors $X \cup Y$ est connexe.

(8) Montrer que la limite $\lim \sin(n)$ n'existe pas.