MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Pour une partie $X \subseteq \mathbf{R}^n$ quelconque, montrer que
- $\operatorname{int}(\operatorname{int}(X)) = \operatorname{int}(X)$,
- $\operatorname{ext}(\operatorname{ext}(X)) \cap \operatorname{ext}(X) = \emptyset$,
- $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

(2) Supposons que $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Montrer que
- $\operatorname{int}(X)$ est le plus grand partie ouverte de X.
- $\overline{X}$ est le plus petit partie ferme de $\mathbf{R}^n$ contenant X.
- $\operatorname{ext}(X)$ est le plus grand partie ouverte de X^c.
- $\overline{X}^c$ est le plus grand partie ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant X^c.

(3) Déterminer ∂X ; où
- $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$
- $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$
- $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x_1 \neq 0 \text{ et } x_2 \leq \frac{1}{x_1}\}$

(4) On dit qu'une partie $X \subseteq \mathbf{R}^n$ est *dense* si $\overline{X} = \mathbf{R}^n$.
- Montrer qu'une partie $X \subseteq \mathbf{R}^n$ est dense si et seulement si pour tout partie ouverte $U \subseteq \mathbf{R}^n$ on a $X \cap U \neq \emptyset$.
- Montrer que si X et Y sont deux parties ouvertes denses de $\mathbf{R}^n$ alors $X \cap Y$ est dense, aussi.
- Montrer que l'assertion précédente ne pas vraie si X et Y n'est pas ouvertes.

(5) Trouver un recouvrement ouvert fini et un recouvrement ouvert infini de X où :
- $X = (-1, 1) \subseteq \mathbf{R}$
- $X = [-1, 1) \subseteq \mathbf{R}$
- $X = (-1, 1) \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$
- $X = \mathbf{R} \times (-1, 1] \subseteq \mathbf{R}^2$
- $X = B[(0, 0, 0), 1] \subseteq \mathbf{R}^3$

(6) Montrer que les ensembles suivantes ne sont pas compacts en trouvant un recouvrement ouvert qui ne possède pas de recouvrement fini :
- $(0, 1) \subseteq \mathbf{R}$
- $(a, b) \subseteq \mathbf{R}$
- $(a, b] \subseteq \mathbf{R}$
- $[a, b) \subseteq \mathbf{R}$
- $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbf{R}^2$
- $(a, b) \times (a, b) \subseteq \mathbf{R}$
- $(a, b) \times (a, b] \subseteq \mathbf{R}$
- $(a, b) \times [a, b) \subseteq \mathbf{R}$

(7) Montrer que si X et Y sont parties compactes de $\mathbf{R}^n$ alors $X \cup Y$ est compact. En deduire que l'union d'une famille finie, disons $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de parties de $\mathbf{R}^n$ est compact, aussi.

(8) Montrer que si $X \subseteq \mathbf{R}^n$ est une partie finie, disons $|X| = k < \infty$ alors X est compact.