MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
- ▶ $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 - 25}$
- ▶ $f(x_1, x_2) = \sqrt{25 - 9x_1^2 - 4x_2^2}$
- ▶ $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2}$
- ▶ $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$
- ▶ $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}$

(2) Donner une description géometrique des courbes de niveau des fonctions suivantes :
- ▶ $f(x_1, x_2) = x_1^2$
- ▶ $f(x_1, x_2) = \sin(x_1)$
- ▶ $f(x_1, x_2) = x_2$
- ▶ $f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$
- ▶ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2$

(3) Soient $U \subset \mathbf{R}^2$, $f, g \colon U \to \mathbf{R}$ deux fonctions, $(a_1, a_2) \in \operatorname{int}(U)$ avec

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1, x_2) = L \quad \text{et} \quad \lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} g(x_1, x_2) = M$$

Montrer que
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} (f+g)(x_1, x_2) = L + M$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} (f-g)(x_1, x_2) = L - M$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} (fg)(x_1, x_2) = LM$

(4) Calculer les limites suivantes :
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2}$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1 x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{x_1^2 + x_2^2}$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^3 x_2}{2x_1^6 + x_2^2}$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x_1) x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$
- ▶ $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\cos(x_1)\sin(x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)}$

- $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(1,\pi)} \frac{\cos(x_1x_2)}{1-x_1-\cos(x_2)}$
- $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(1,0)} \frac{(x_1-1)^2x_2^2}{(x_1-1)^2+x_2^2}$
- $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(1,2)} \frac{2x_1^2-x_1x_2}{4x_1^2-x_2^2}$

(5) Est-ce qu'il existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que la fonction $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x_1)\sin^3(x_2)}{1-\cos(x_1^2+x_2^2)}, & \text{si } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ \lambda, & \text{si } (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$?

(6) Soit $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x_1x_2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{si } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si } (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases}$.
- Décider si f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
- Calculer ∇f pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$.

(7) Calculer f_1 et f_2 où
- $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1^3-x_2^3}{x_1^2+3x_2^2}, & \text{si } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si } (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases}$.
- $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{3x_1^2-2x_2^2}{x_1^2+3x_2^2}, & \text{si } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si } (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases}$.
- $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2-2x_2^2}{x_1-x_2}, & \text{si } x_1\neq x_2 \\ 0, & \text{si } x_1=x_2 \end{cases}$.

(8) Déterminer une équation du plan tangent en P de la fonction f où :
- $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$, en $P=(1,2)$
- $f(x_1,x_2)=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$, en $P=(1,1)$
- $f(x_1,x_2)=\sin(\frac{x_2}{x_1})$, en $P=(4,\pi)$
- $f(x_1,x_2)=\ln(x_1^2+x_2^2)$, en $P=(-2,1)$
- $f(x_1,x_2)=\arctan(x_1+x_2^2)$, en $P=(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$
- $f(x_1,x_2)=\sqrt{(x_1+x_2^2)}$, en $P=(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$

(9) Calculer les dérives partielles jusqu'à deuxième ordre des fonctions suivantes :
- $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+2x_2^2}$
- $f(x_1,x_2)=x_1e^{x_2}+x_2e^{x_1}$
- $f(x_1,x_2)=\ln(x_1^2+x_2^2)$
- $f(x_1,x_2)=\arctan(x_1^2-x_2^2)$

(10) Soit $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$. Calculer $f_{11}+f_{22}+f_{33}$.

(11) Soit $f(x_1,x_2)=\sin^2(x_1^2+x_2^2)-\cos^2(x_1^2+x_2^2)$.
- Déterminer une équation du plan tangent de f à l'origine $(0,0)$.
- Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ and $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}$.

(12) Une fonction $f\colon U\to\mathbf{R}$; où $U\subset\mathbf{R}^2$ une partie ouverte non-vide, est appellé harmonique si f satisfait l'équation de Laplace (en dimension 2) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=f_{1,1}+f_{2,2}=0.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :
- $f(x_1,x_2)=A(x_1^2-x_2^2)+Bx_1x_2$; où $A,B\in\mathbf{R}$ constants.
- $f(x_1,x_2)=3x_1^2x_2-x_2^3$

- $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$, pour $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$
- $f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$, pour $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

(13) Une fonction $f \colon U \to \mathbf{R}$; où $U \subset \mathbf{R}^3$ une partie ouverte non-vide, est appellé harmonique si f satisfait l'équation de Laplace (en dimension 3) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f_{1,1} + f_{2,2} + f_{3,3} = 0.$$

Montrer que $f(x_1, x_2, x_3) = e^{3x_1+4x_2} \sin(5x_3)$ est harmonique.

(14) Montrer que si $f(x_1, x_2)$ est une fonction harmonique sur $\mathbf{R}^2$, alors $f\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)$ est harmonique, aussi.

(15) Calculer les dérivées partielles suivantes en termes de dérivées partielles de f :
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(f(x_1+2, 4x_2))$
- $\frac{\partial f}{\partial x_2}(f(x_1+2, 4x_2))$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_2 f(x_1, t), f(x_2, t))$
- $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 f(x_1, t), f(x_2, t))$

(16) Calculer $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(f(2x_1 + x_2, 3x_1 + 4x_2))$.

(17) Posons $x_1 = e^s \cos(t)$, $x_2 = e^s \sin(t)$ et $z(s,t) = u(x_1(s,t), x_2(s,t))$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x_1^2 + x_2^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right)$$