MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Soient $U \subseteq \mathbf{R}^2$ une partie ouverte non-vide, $(a_1, a_2) \in U$ et $f, g \colon U \to \mathbf{R}$ deux fonctions. Montrer que si f, g sont dérivables en (a_1, a_2) alors :
- ▶ $f + g$ (en utilisant la définition de dérivabilité)
- ▶ $f - g$ (en utilisant la définition de dérivabilité)
- ▶ fg
- ▶ f/g

sont dérivables, aussi.

(2) Montrer que le graphe de f et g contient p_o et déterminer l'angle entre les plans tangents de $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_g$ á p_o où
- ▶ $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2^2$, $g(x_1, x_2) = \frac{1}{8}\left(8x_1^2 - 5x_2^2 + 13\right)$ et $p_o = (1, 1, 2)$
- ▶ $f(x_1, x_2) = 2 + \sqrt{21 - (x_1 + 1)^2 - (x_2 - 2)^2}$, $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\sqrt{24 - 4x_1^2 - x_2^2}$ et $p_o = (1, -2, 1)$

(3) Trouver un point sur le graphe de $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 - 1}$ où le plan tangent est parallèle au plan $\{x_1 + 4x_2 - y = 0\}$.

(4) Déterminer les points pour lequels le plan tangent du graphe de f est horizontal où :
- $f(x_1, x_2) = 3 - x_1^2 - x_2^2 + 6x_2$
- $f(x_1, x_2) = 5x_1x_2$
- $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 8x_1 - 5x_2 - 4$
- $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2)$

(5) Montrer que si $f \colon U \to \mathbf{R}$ une fonction qui est dérivable en $(a_1, a_2) \in \operatorname{int}(U)$, alors f est continue en (a_1, a_2).

(6) Considerons l'application $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1x_2}$.
- ▶ Montrer que f est continue.
- ▶ Déterminer $f_1(0, 0)$ et $f_2(0, 0)$.
- ▶ Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire. Montrer que si $\overrightarrow{u} \neq \langle 1, 0\rangle$ et $\overrightarrow{u} \neq \langle 0, 1\rangle$ alors la dérive directionelle de f à $(0, 0)$ dans la direction de $\overrightarrow{u}$ n'existe pas.

(7) Considerons $f(x_1, x_2) = (c - (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}))^2$.
- ▶ Déterminer la domaine de f, noté U.
- ▶ Pour un point $(a_1, a_2) \in U$ quelconque écrire une equation du plan tangente, noté $\mathcal{P}_{(a_1,a_2)}$.
- ▶ Soient α_i le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_{(a_1,a_2)}$ et l'axe x_i, pour $i = 1, 2$ et α_3 le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_{(a_1,a_2)}$ et l'axe y. Montrer que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ est une constante.

(8) Soient $f \colon U \to \mathbf{R}$ une fonction, $(a_1, a_2) \in \operatorname{int}(U)$ un point. Montrer que s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ sont continues dans $B((a_1, a_2), \varepsilon)$, alors pour $(a_1 + h, a_2 + k) \in B((a_1, a_2), \varepsilon)$, il existe $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tels que :
$$f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) = hf_1(a_1 + \theta_1 h, a_2) + kf_2(a_1 + h, a_2 + \theta_2 k)$$

(9) Soient $f \colon U \to \mathbf{R}$ une fonction, $(a_1, a_2) \in \operatorname{int}(U)$ un point. Montrer que s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ sont continues dans $B((a_1, a_2), \varepsilon)$, alors pour $(a_1 + h, a_2 + k) \in B((a_1, a_2), \varepsilon)$, il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que :
$$f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) = hf_1(a_1 + \theta h, a_2 + \theta k) + kf_2(a_1 + \theta h, a_2 + \theta k)$$