MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Soit a_n une suite positive et posons
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$
Montrer que si $L > 1$ ou $L = \infty$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

(2) Soit a_n une suite positive et posons
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$
- Montrer que si $L > 1$ ou $L = \infty$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.
- Trouver une suite a_n telle que $L = 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- Trouver une suite a_n telle que $L = 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

(3) Supposons que a_n une suite alternée. Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument alors $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

(4) Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence des séries entières suivantes :
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}x^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1}x^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}x^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$

(5) Déterminer la série de Taylor des fonctions suivantes autour de c et déterminer leur intervalle de convergence :
- $f(x) = \sin(x)$ autour de $c = \frac{\pi}{2}$
- $f(x) = \sin(x)$ autour de $c = \frac{\pi}{4}$
- $f(x) = \cos(x)$ autour de $c = \frac{\pi}{2}$
- $f(x) = \cos(x)$ autour de $c = \frac{\pi}{4}$
- $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ autour de $c = 0$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ autour de $c = 1$
- $f(x) = \arctan(x)$ autour de $c = 1$
- $f(x) = e^{x^2}$ autour de $c = 1$
- $f(x) = (x-1)e^x$ autour de $c = 1$
- $f(x) = x^3 + 2x - 3$ autour de $c = 0$
- $f(x) = x^3 + 2x - 3$ autour de $c = -1$
- $f(x) = x^4$ autour de $c = 0$

- $f(x) = x^4$ autour de $c = 1$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ autour de $c = 0$
- $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ autour de $c = 0$
- $f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt$ autour de $c = 0$
- $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ autour de $c = 0$