MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) On définit $f(x) = (1+x)^{1/2}$.
- ► Montrer que $f^{(k)}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ \ldots\ \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)$.
- ► Montrer que la série de Taylor de $f(x)$ autour de 0 est :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ \ldots\ \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)\right)x^k.$$

- ► Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de la série ci-dessus.

(2) On définit $f(x) = (1+x)^r$; où $r \in \mathbf{R} \setminus 0$
- ► Montrer que $f^{(k)}(0) = r\ (r-1)\ \ldots\ (r-(k-1))$.
- ► Montrer que la série de Taylor de $f(x)$ autour de 0 est :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(r\ (r-1)\ \ldots\ (r-(k-1))\right)x^k.$$

- ► Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de la série ci-dessus.

(3)
- ► Calculer $\sin(\pi/90)$ en utilisant la série de Taylor de $f(x) = \sin(x)$ autour de 0 jusqu'a (et y compris) termes de degré 3.
- ► Calculer la borne sur l'erreur de votre approximation.
- ► Pour avoir une erreur plus petit que 10^{-17}, combien de termes de la série de Taylor de $\sin(x)$ faut-il calculer?

(4)
- ► Calculer $\cos(\pi/90)$ en utilisant la série de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ autour de 0 jusqu'a (et y compris) termes de degré 3.
- ► Calculer la borne sur l'erreur de votre approximation.
- ► Pour avoir une erreur plus petit que 10^{-17}, combien des termes de la série de Taylor de $\cos(x)$ faut-il calculer?

(5) Soit $f(x) = \cos(x)$.
- ► Calculer $\cos(43\pi/180)$ en utilisant la série de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ autour de 0 jusqu'a (et y compris) termes de degré 4.
- ► Calculer la borne sur l'erreur de votre approximation.
- ► Calculer $\cos(43\pi/180)$ en utilisant la série de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ autour de $\pi/4$ jusqu'a (et y compris) termes de degré 4.
- ► Calculer la borne sur l'erreur de votre approximation. Comparer les deux erreurs.

(6) Utiliser une série de Taylor pour calculer les réels suivantes :
- ► $\ln(6/5)$
- ► $e^{6/5}$
- ► $\arctan(1/5)$

(7) Déterminer la série de Taylor des fonctions suivantes autour des points indiqués :
- ► $f(x_1, x_2) = \frac{1}{1+x_1x_2^2}$, $c = (0,0)$
- ► $f(x_1, x_2) = \ln(1+x_1+x_2)$, $c = (0,0)$
- ► $f(x_1, x_2) = \arctan(x_1 + x_1x_2)$, $c = (0,-1)$
- ► $f(x_1, x_2) = x_1^3x_2 + x_1x_2^2 + x_2$, $c = (0,1)$
- ► $f(x_1, x_2) = x_1^3x_2 + x_1x_2^2 + x_2$, $c = (1,0)$
- ► $f(x_1, x_2) = x_1^3x_2 + x_1x_2^2 + x_2$, $c = (1,1)$

(8) Soit $f(x_1, x_2) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}$.

- Déterminer la série de Taylor de f autour de $(0, 0)$.
- Calculer $\left.\frac{\partial^{16} f}{\partial x_1^{12} \partial x_2^4}\right|_{(0,0)}$
- Calculer $\left.\frac{\partial^{16} f}{\partial x_1^{8} \partial x_2^8}\right|_{(0,0)}$
- Calculer $\left.\frac{\partial^{16} f}{\partial x_1^{4} \partial x_2^{12}}\right|_{(0,0)}$
- Calculer $\left.\frac{\partial^{4k} f}{\partial x_1^{2k} \partial x_2^{2k}}\right|_{(0,0)}$

(9) Classifier les points critiques des fonctions suivantes :

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1$
- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2 - 2$
- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 6x_2$
- $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$
- $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3 + (x_1 - x_2)^2$
- $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4(x_1 - x_2)^2$
- $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (1 + x_1 + 2x_2)$

(10) Déterminer extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

- $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)$ sur $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$
- $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + x_1 - x_2$ sur $U = [01,] \times [0, 1]$
- $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_1 + x_2)$ sur $U = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$
- $f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$ sur $U = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 6\}$