

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	18	10	24	28	16	96
Score:						

Question 1 (18 pts)

Décider si les séries suivantes converge :

(a) (6 points) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2}$

(b) (6 points) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n e^{n^2} n^3}{(2n)!}$

(c) (6 points) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(n)}{n^3 + 1}$

Question 2 (10 pts)

Soit $f(x_1, x_2) = 2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

- (a) (6 points) Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, écrire une équation de plan tangente, $\mathcal{P}_{(\alpha, \beta)}$ de f à (α, β) .

- (b) (4 points) Montrer que pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ quelconque $(0, 0, 2) \in \mathcal{P}_{(\alpha, \beta)}$.

Question 3 (24 pts)

Soit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1^2x_2 + 2$ et soit $\mathcal{U} = B[(0, 0), 1]$.

(a) (4 points) Donner une paramétrisation de $\partial(\mathcal{U})$.

(b) (8 points) Trouver le maximum et minimum de f sur $\partial(\mathcal{U})$. Indication: Si $\arcsin(-2/3) = \alpha$, alors $\sin(\alpha) = -2/3$ et $\sin(\pi - \alpha) = 2/3$. On a $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(c) (8 points) Classifier les points critiques de f dans $\text{int}(\mathcal{U})$.

(d) (4 points) En déduire le maximum et minimum globaux de f sur $\mathcal{U}$.

Question 4 (28 pts)

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$.

(a) (6 points) Déterminer la série de Taylor de f autour de $c = 0$.

(b) (8 points) Déterminer l'intervalle de convergence de la série de (a).

(c) (6 points) Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{3n+1}}$. Indication: Utiliser la série dans (a).

(d) (8 points) Soit $g(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{1 + (x_1^2 + x_2^2)^3}$. Déterminer $\frac{\partial^{404} g}{\partial x_1^{202} \partial x_2^{202}}(0, 0)$. Indication: Utiliser la série de Taylor de g .

Question 5 (16 pts)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si vraie, donner une démonstration, si faux donner un contre-exemple.

(a) (4 points) (**V** / **F**) Si a_n est une suite ni croissante ni décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(b) (4 points) (**V** / **F**) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ diverge, aussi.

(c) (4 points) (**V** / **F**) Soit U une partie ouverte et V une partie fermée de $\mathbf{R}^3$. Alors, $U \cup V$ est ni ouverte, ni fermé.

(d) (4 points) (**V** / **F**) La partie $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid |x_1 x_2 x_3| \leq 1\} \subseteq \mathbf{R}^3$ est compacte.