Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2018- Premier Semestre – Math 201 - Analyse à Plusieurs Variables
Examen Partiel 1, 25 octobre 2019 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ____________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	30	10	12	12	12	76
Score:						

Question 1 (30 points)

Montrer que les affirmations suivantes sont fausses en donnant un contre-exemple.

(a) (6 points) Supposons que A, B deux parties de $\mathbf{R}^n$. On a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) (6 points) Supposons que A, B deux parties de $\mathbf{R}^n$. On a $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$

(c) (6 points) Supposons que $U \subseteq \mathbf{R}^n$ une partie ouverte. Alors $U = \mathrm{int}(\overline{U})$.

(d) (6 points) Supposons que $X, Y \subseteq \mathbf{R}^n$ deux parties quelconques. Si $X \cap Y = \emptyset$ alors $\overline{X \cup Y}$ est non-connexe.

(e) (6 points) Si $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \ldots$ une suite de parties non-vides fermées de $\mathbf{R}^n$ alors $\cap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$.

Question 2 (10 points)

Montrer qu'une partie $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{R}^n$ satisfait $\partial\mathsf{X} = \emptyset$ si et seulement si X est ouvert et ferme en même temps.

Question 3 (12 points)

Expliciter la partition $\operatorname{int}(X)$, $\operatorname{ext}(X)$, $\partial(X)$ où

(a) (6 points) $X = \{(n, 1/n) \in \mathbf{R}^2 \mid n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbf{R}^2$

(b) (6 points) $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 \neq 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$

Question 4 (12 points)

Soit X, Y deux parties de $\mathbf{R}$.

(a) (6 points) Montrer que si X et Y sont bornées alors $\mathsf{X} \times \mathsf{Y} \subseteq \mathbf{R}^2$ et bornée, aussi.

(b) (6 points) Montrer que si X et Y sont compactes alors $\mathsf{X} \times \mathsf{Y} \subseteq \mathbf{R}^2$ est compacte, aussi.

Question 5 (12 points)

(a) (6 points) Soient $X \subseteq \mathbf{R}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{R}^m$ deux parties ouvertes. Montrer que $X \times Y \subseteq \mathbf{R}^{n+m}$ est ouvert.

(b) (6 points) Montrer que $[0,1] \times [0,1] \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^3$ n'est pas compact en trouvant un recouvrement ouvert qui ne possède pas de sous-recouvrement fini.