MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 10

A. ZEYTİN

(1) Utiliser théorème de Green pour calculer les intégrales curviligne suivantes :
- ▶ $\oint_C x^{3/4}e^x\,dx + 3x\,dy$; où C est le quadrilatère avec les sommets $(1,1)$, $(5,1)$, $(4,3)$, $(2,3)$.
- ▶ $\oint_C (x^3 - xy)\,dx + (6y - 9x)\,dy$; où C est le quadrilatère avec les sommets $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,2)$, $(-1,4)$.
- ▶ $\oint_C \left((-x-1)^{x\sin(x)} + xy\right)\,dx + \left(\sqrt{y^3+y} + x^2 + xy\right)\,dy$; où $C = C_1 + C_2$ avec $C_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = 25, x \leq 0\}$ et C_2 est la droite joignant le point $(0,5)$ au point $(0,-5)$.
- ▶ $\oint_C 2x^2y\,dx + 2x^3\,dy$; où C est le triangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(2,0)$ et $(2,4)$. Réponse : 32
- ▶ $\oint_C (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$; où C est le cercle $x^2+y^2 = a^2$ orienté negativement ($a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ quelconque) Réponse : $-2\pi a^2$
- ▶ $\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$; où C est l'ellipse ayant l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orienté positivement ($a, b \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ quelconque) Réponse : $-2\pi ab$
- ▶ $\oint_C (\sqrt{x^2+y^2})\,dx + \left(y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\right)\,dy$; où C est le cercle $x^2+y^2 = a^2$ orienté positivement. Réponse : $\frac{\pi a^2}{4}$

(2) Utiliser le champ vectoriel $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ pour calculer l'aire de $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Réponse : πab

(3) Soit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)\cos(t))$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Calculer l'aire de la région dans γ en utilisant le théorème de Green.

(4) Fixons le champ de vecteur $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
- ▶ Soit $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ deux points quelconques de $\mathbf{R}^2$. Montrer que
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = x_1y_2 - x_2y_1$$
- ▶ Soit T le triangle dont les sommets sont $p_1 = (x_1,y_1), p_2 = (x_2,y_2)$ et $p_3 = (x_3,y_3)$. Montrer que l'aire de T est
$$\frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right]$$
- ▶ Vérifier
- ▶ Soit Q le quadrilatère dont les sommets sont $p_1 = (x_1,y_1), p_2 = (x_2,y_2), p_3 = (x_3,y_3)$ et $p_4 = (x_4,y_4)$. Montrer que l'aire de Q est
$$\frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_1 - x_1y_4)\right]$$
- ▶ Plus généralement si P un polygône dont les sommets sont $p_i = (x_i, y_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ alors l'aire de Q est
$$\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\right) + (x_ny_1 - x_1y_n)\right]$$