MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 12

A. ZEYTİN

(1) Soit $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ un champ vectoriel défini sur $\mathbf{R}^3$ et les fonctions P, Q et R sont de classe C^∞. Montrer que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

(2) Calculer $\nabla \times \mathbf{F}$ et $\nabla \cdot \mathbf{F}$ où
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix}$.
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy+z \\ e^{xy} \\ \sin(x+z) \end{pmatrix}$
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(1+x^2) \\ x^3+y^2 \\ e^{xz} \end{pmatrix}$
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^x \\ xe^y \\ ye^z \end{pmatrix}$
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+z^2 \\ 2+\cos(x+y+z) \\ 3+\arctan(x+y+z) \end{pmatrix}$

(3) Soient $\mathbf{F}(x,y,z)$, $\mathbf{G}(x,y,z)$ champ vectoriels, et $f, g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ fonctions différentiables. Supposons que les composantes de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont de classe $C^\infty(\mathbf{R}^3)$. Vérifier les égalités suivantes :
- ► $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times G$
- ► $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$

(4) Décider si les champs vectoriels suivants sont conservatifs en déterminant $\nabla \times \mathbf{F}$. Dans l'affimative, déterminer le potentiel associé :
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix}$.
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^x \\ xe^y \\ ye^z \end{pmatrix}$
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (1+x+y+z)e^{x+y+z} \\ (1+x+y+z)e^{x+y+z} \\ (1+x+y+z)e^{x+y+z} \end{pmatrix}$
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\cos(xy \\ x\cos(xy \\ z+\sin(z) \end{pmatrix}$
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(y) \\ e^z \end{pmatrix}$

(5) Déterminer le bord des surfaces suivantes :
- ► $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+4y^2+9z^2 \leq 9,\ x \geq 0\}$ orientée par rapport à vecteur normale sortant
- ► $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2+y^2,\ 0 \leq z \leq 4\}$ orientée par rapport à vecteur normale avec $z < 0$

- ► $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 2\}$ orientée par rapport à vecteur normale avec $z < 0$
- ► $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ |z| \leq 1\}$ orientée par rapport à vecteur normale sortant
- ► S est la partie du plan $y = x + 3$ dans le cylindre $x^2 + z^2 = 1$ orientée par rapport à vecteur normale avec $z > 0$

(6) En utilisant théorème de Stokes calculer $\iint_\Sigma (\nabla F \cdot \mathbf{N})\, dS$; où :

- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(z) + 4y \\ \sin(z) + 4x \\ x^2z^2 \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$ orienté par rapport à vecteur normale avec $z > 0$.
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = z^2 + y^2,\ z \leq 1\}$ orienté par rapport à vecteur normale avec $z > 0$.
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ xy \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$, orienté par rapport à vecteur normale sortant.
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 7yz \\ 3x \\ 10yze^{x^2} \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = x^2/4 + y^2/16, 0 \leq z \leq 2\}$ orienté par rapport à vecteur normale avec $z < 0$.

(7) En utilisant théorème de Stokes calculer :

- ► $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (x^3y^2)\, dx + dy + z^2\, dz$; où $\mathcal{C}$ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ dans le plan $\{z = 1\}$, orienté en sens anti-horaire.
- ► $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz$; où $\mathcal{C}$ est le triangle dont les sommets sont $p_1 = (2,0,0)$, $p_2 = (0,1,0)$ et $p_3 = (0,0,3)$ orienté comme $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_1$.
- ► $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} 4y\, dx + 2z\, dy + 6y\, dz$; où $\mathcal{C}$ est la courbe d'intersection des surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ et $z = x + 3$ orienté positivement.
- ► $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} z^2e^{x^2}\, dx + xy^2\, dy + \arctan(y)\, dz$; où $\mathcal{C}$ est le cercle $x^2 + y^2 = 9$ dans $z = 0$ orienté positivement.

(8) Vérifier théorème de la divergence dans les cas suivants :

- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix}$ et $U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\}$ Réponse : 6π
- ► $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} + yz \\ \frac{y^3}{3} - \sin(xz) \\ z - x - y \end{pmatrix}$ et $U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, \}$

(9) Calculer les intégrales suivantes :

- ► $\displaystyle\oiint_\Sigma (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS$; où $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} + yz \\ \frac{y^3}{3} - \sin(xz) \\ z - x - y \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \partial U$ pour $U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$ orienté positivement par rapport à U. Réponse : 3π
- ► $\displaystyle\oiint_\Sigma (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS$; où $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + yz \\ y - z \\ 2(x + y + z) \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \partial U$ pour $U = [0,2] \times [1,4] \times [0,1]$ orienté positivement par rapport à U. Réponse : 30
- ► $\displaystyle\oiint_\Sigma (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS$; où $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \partial U$ pour $U = [1,4] \times [2,5] \times [1,4]$ orienté positivement par rapport à U. Réponse : $9\ln(16)$

► $\oiint_{\Sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, \mathrm{d}S$; où $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{yz} \\ \frac{\sin(xz}{1+x^2+z^2} \\ xye^{y^2} \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \partial U$ pour $U = [2, 0] \times [1, 2] \times [0, 2]$ orienté positivement par rapport à U. Réponse : 0