MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Calculer les intégrales suivantes par inspection :
- $\iint_R \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dA$; où $R = B[(0,0),2]$.
- $\iint_R 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dA$; où $R = B[(0,0),2]$.
- $\iint_R \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2} dA$; où $R = B[(0,0),2]$.

(2) Calculer
- $\iint_R 2x_1 - 3x_2 dA$; où R est le triangle avec les sommets $(a,0)$, $(0,b)$ et $(0,0)$ pour $a, b > 0$.
- $\iint_R x_1^2 x_2 dA$; où R est la partie finie de $\mathbf{R}^2$ entre les courbes $x_1^2 = x_2$ et $x_1 = x_2^2$.
- $\iint_R \ln(x_1) dA$; où R est la partie entre le courbe $x_1 x_2 = 1$ et $x_1 + x_2 = 4$ dans le premier quadrant.
- $\iint_R x_1 + x_2 dA$; où R est la partie de $\mathbf{R}^2$ entre le courbe $x_1^2 = 2x_2 + 6$ et la droite $x_1 = x_2 - 1$
- $\iint_R x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dA$; où $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_1 \leq x_2\}$ est
- $\int_0^1 \int_{x_1}^1 e^{\frac{x_1}{x_2}} dx_2 dx_1$
- $\int_0^4 \int_{\sqrt{x_1}}^2 \frac{1}{1 + x_2^3} dx_2 dx_1$
- $\int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \sin(x_1^2) dx_1 dx_2$

(3) Déterminer la volume de la partie de $\mathbf{R}^3$ entre
- $y = 1 - x_2^2$, $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, $y = 0$ et $x_2 = x_1$.
- $y = \frac{1}{x_1 + x_2}$, $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $y = 0$ et $x_1 = x_2$

(4) Supposons que $\iint_R f(x_1, x_2) dA$ et $\iint_R g(x_1, x_2) dA$ existent. Montrer que :
- $\iint_R (cf)(x_1, x_2) dA = c \iint_R f(x_1, x_2) dA$; où $c \in \mathbf{R}$ une constante.
- $\left| \iint_R f(x_1, x_2) dA \right| \leq \iint_R |f(x_1, x_2)| dA$.
- $\iint_R (f + g)(x_1, x_2) dA = \iint_R f(x_1, x_2) dA + \iint_R g(x_1, x_2) dA$.
- $\iint_R (f - g)(x_1, x_2) dA = \iint_R f(x_1, x_2) dA - \iint_R g(x_1, x_2) dA$.

(5) Soit $f(x_1, x_2)$ une fonctions qui admet une factorisation : $f(x_1, x_2) = g(x_1) h(x_2)$ pour certain fonctions g et h d'une variable. Montrer que

$$\iint_R f(x_1, x_2) dA = \int_a^b g(x_1) dx_1 \int_c^d h(x_2) dx_2;$$

où $R = [a, b] \times [c, d]$. Exemplifier la situation pour la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2$ et $R = [1, 2] \times [2, 4]$.

(6) Déterminer $T(R)$ où T et R sont :

- $T(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arctan(\frac{x_2}{x_1}))$, $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$
- $T(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$, $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 1\}$
- $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x_2 \leq 2 \text{ et } |x_1| \leq x_2\}$