MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Evaluer les intégrales suivantes :
- ► $\iint_R y\mathrm{d}A$; où R est la partie de $\mathbf{R}^2$ entre les courbes $y = x - 2$, $x = y^2$.
- ► $\iint_R y^2 e^{xy}\mathrm{d}A$; où R est la partie de $\mathbf{R}^2$ entre les courbes $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.
- ► $\iint_R x\cos(y)\mathrm{d}A$; où R est la partie de $\mathbf{R}^2$ entre les courbes $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.
- ► $\iint_R xy^2\mathrm{d}A$; où R est la partie de $\mathbf{R}^2$ entre les courbes $x = 0$, $x = \sqrt{1-y^2}$.
- ► $\iint_R (x-2y)\mathrm{d}A$; où R est $B[(0,0),2]$.
- ► $\iint_R xy\mathrm{d}A$; où R est le rectangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(0,5)$, $(3,5)$ et $(3,0)$.
- ► $\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}A$; où R est la partie de $\mathbf{R}^2$ entre $x = y$, $x = y/2$, $x = 1$ et $x = 2$.

(2) Déterminer le volume
- ► entre la surface d'équation $x^2 + y^2 = z$ et le plan $z = 4$.
- ► entre la surface d'équation $z = 1 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 1 - y$.

(3) Soit $f\colon U \to \mathbf{R}$ une fonction continue; où $U \subseteq \mathbf{R}^2$ une partie ouverte. On définit la valeur moyenne de f sur une partie $R \subseteq U$ comme :

$$\langle f\rangle_R := \iint_R f(x,y)\mathrm{d}A.$$

Déterminer la moyenne de f sur R où :
- ► $f(x,y) = x$, R est le rectangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$ et $(0,2)$
- ► $f(x,y) = x^2 + y^2$, R est le rectangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$ et $(4,4)$
- ► $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$, R est le triangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(4,0)$ et $(0,4)$.

(4) Evaluer les intégrales suivantes en utilisant les coordonnées polaires :
- ► $\iint_R x^2 + y\mathrm{d}A$; où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.
- ► $\iint_R \sqrt{16 - x^2 - y^2}\mathrm{d}A$; où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$.
- ► $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- ► $\int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- ► $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sin(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}x$;

(5) Soit R le rectangle dont les sommets sont $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ et $(1,0)$. Evaluer l'intégrale

$$\iint_R (x+y^2)\sin^2(x-y)\mathrm{d}A,$$

en utilisant la transformation $T(x,y) = (u,v) = (x+y, x-y)$.

(6) Soit R la partie de $\mathbf{R}^2$ entre les courbes $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 2x$ et $y = \frac{1}{4}x$. Evaluer l'intégrale

$$\iint_R e^{-xy/2} dA,$$

en utilisant la transformation $T^{-1}(u, v) = (x, y) = (\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv})$.

(7) Soit R la partie de $\mathbf{R}^2$ entre les courbes $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 1$ et $y = 4$. Evaluer l'intégrale

$$\iint_R y \sin(xy) dA,$$

en utilisant la transformation $T^{-1}(u, v) = (x, y) = (\frac{u}{v}, v)$.

(8) Soit $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 \leq 2\}$. Evaluer l'intégrale

$$\iint_R x^2 - xy + y^2 dA,$$

en utilisant la transformation $T^{-1}(u, v) = (x, y) = (\sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v, \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v)$. (Indication: R est un ellipse)

(9) Calculer les intégrales impropres suivantes :

- ► $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA$
- ► $\displaystyle\iint_R e^{-\frac{y}{x}} \frac{2}{x^3} dA$; où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$
- ► $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2} dA$; où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$
- ► $\displaystyle\iint_R e^{-x-y} dA$; où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$.