MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Donner une approximation aux intégrales suivantes :
- ► $\iiint_U x+2y-3z\,dV$; où $U=[0,1]^3\subset\mathbf{R}^3$ en utilisant la partition $\mathcal{P}=\{x_0=0<x_1=\frac{1}{2}<x_2=1, y_0=0<y_1=\frac{1}{3}<y_2=1, z_0=0<z_1=\frac{1}{4}<z_2=1\}$
- ► $\iiint_U 2x+y-3z\,dV$; où $U=[-1,1]^3\subset\mathbf{R}^3$ en utilisant la partition $\mathcal{P}=\{x_0=-1<x_1=0<x_2=1, y_0=-1<y_1=\frac{1}{2}<y_2=1, z_0=-1<z_1=\frac{1}{2}<z_2=1\}$
- ► $\iiint_U -3x+2y+z\,dV$; où $U=[0,2]^3\subset\mathbf{R}^3$ en utilisant la partition $\mathcal{P}=\{x_0=0<x_1=1<x_2=2, y_0=0<y_1=1+\frac{1}{3}<y_2=2, z_0=0<z_1=1<z_2=2\}$
- ► $\iiint_U 3x-y-2z\,dV$; où $U=[0,1]\times[-1,1]\times[0,2]\subset\mathbf{R}^3$ en utilisant la partition $\mathcal{P}=\{x_0=0<x_1=\frac{1}{2}<x_2=1, y_0=-1<y_1=0<y_2=1, z_0=0<z_1=1<z_2=2\}$

(2) Démontrer que si U, V deux parties non-vides quelconques, alors :
$$\iiint_{U\cup V} f(x,y,z)\,dV_{x,y,z}=\iiint_U f(x,y,z)\,dV_{x,y,z}+\iiint_V f(x,y,z)\,dV_{x,y,z}-\iiint_{U\cap V} f(x,y,z)\,dV_{x,y,z}$$

(3) Calculer les intégrales itérées suivantes :
- ► $\displaystyle\int_0^2\int_0^1\int_0^3 (x+2y+3z)\,dz\,dx\,dy$
- ► $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-2}^2\int_{-2}^2 xy^2z^3\,dx\,dz\,dy$
- ► $\displaystyle\int_0^2\int_1^{y^2}\int_0^{xy} e^{xyz}\,dz\,dx\,dy$
- ► $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi z/2}\int_{y+z}^{y-z} (x\sin(z)+y^2)\,dx\,dy\,dz$

(4) Soit U, la région de $\mathbf{R}^3$ à l'intérieur du tétraèdre dont les sommets sont $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(1,1,0)$ et $D=(1,1,1)$. Calculer $\iiint_U (x^2+y+yz)\,dV_{x,y,z}$.

(5) Écrire une intégrale triple pour calculer la volume de la solide finie R et l'evaluer; où :
- ► R est la partie de $\mathbf{R}^3$ entre les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ en supposant que $a,b,c\in\mathbf{R}_+$.
- ► R est la partie de $\mathbf{R}^3$ entre le surface d'équation $z=x^2+y^2$ et le plan $z=4$.
- ► R est la partie de $\mathbf{R}^3$ entre les plans $z=2$, $z=3$ $x=0$, $y=0$ et $x^2+y^2=z^2$.
- ► $R=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,z\geq 0,\ x^2+y^2\leq z^2 \text{ et } x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

(6) Soit $U=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,0\leq y\leq 1, 0\leq x\leq y, y\leq z\leq 2y\}$ Écrire $\iiint_U xz\cos(y^3)\,dV_{x,y,z}$ dans les 6 ordres possibles.

(7) Soit U la région finie de $\mathbf{R}^3$ délimitée par la surface $y=x^2+z^2$ et le plan $y=9$. Écrire $\iiint_U \sqrt{x^2+y^2}\,dV_{x,y,z}$ dans les 6 ordres possibles.

(8) Soit U la région finie de $\mathbf{R}^3$ délimitée par la surface $y=x^2+z^2$ et le plan $y=9$. Écrire $\iiint_U \sqrt{x^2+y^2}\,dV_{x,y,z}$ écrire dans les 6 ordres possibles.

(9) Soit U la région finie de $\mathbf{R}^3$ délimitée par la surface $z=1-y^2$ et les plans $x+z=1$, $z=0$, $x=0$. Écrire $\iiint_U 3\,dV_{x,y,z}$ écrire dans les 6 ordres possibles.

(10) Evaluer les intégrales suivantes :

- $\iiint_U (x+y)\,dV_{x,y,z}$; où U est le parallélipipède de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(-1,-1,0)$, $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(-1,1,0)$, $(-1,0,2)$, $(0,1,2)$, $(0,3,2)$ et $(-1,2,2)$.
- $\iiint_U 1\,dV_{x,y,z}$; où U est la pyramide de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(2,2,1)$, $(2,0,1)$, $(0,2,1)$, $(0,0,1)$ et $(1,1,2)$.
- $\iiint_U yz\,dV_{x,y,z}$; où $U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2\}$,
- $\iiint_U (x^2+y^2+z^2)\,dV_{x,y,z}$; où U est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $0 \leq z$, $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ et $z^2 \geq x^2+y^2$,
- $\iiint_U z\,dV_{x,y,z}$; où U est le tétraèdre de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(0,0,0)$, $(1,2,0)$, $(0,2,0)$ et $(0,2,3)$. 8