MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Trouver les coordonnées cylindriques et sphériques des points suivantes :
- $(1, 1, 1)$
- $(1, 1, 2)$
- $(1, 1, -1)$
- $(1, 1, -2)$
- $(1, -1, 1)$

(2) Déterminer la solide dont le volume est $\int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$

(3) Evaluer les intégrales suivantes en introduissant coordonnées cylindriques :
- $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} yz \, dz \, dy \, dx$
- $\iiint_U x^2y + y^3 \, dV_{x,y,z}$; où U est la région dans le premier octant au-dessus de $z = 1 - x^2 - y^2$

(4) Déterminer le volume de la solide dans le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, délimitée par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(5) Déterminer le volume de la solide délimitée par les surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

(6) Evaluer l'intégrale suivante en introduissant coordonnées sphériques :
- $\iiint_U \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dV_{x,y,z}$; où $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$

(7) Evaluer les intégrales suivantes en introduissant coordonnées conveables :
- $\iiint_U \frac{1}{x^2 + y^2 + 4z^2} \, dV_{x,y,z}$; où $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4\}$
- $\iiint_U x^2 + y^2 + z^2 \, dV_{x,y,z}$; où U est la région de $\mathbf{R}^3$ contenue dans le premier octant et consistant des points (x, y, z) tels que $1 \leq xy \leq 2$, $1 \leq yz \leq 2$, $1 \leq xz \leq 2$.

(8) Soit U est le parallélipipède de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(-1, -1, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 2)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 3, 2)$ et $(-1, 2, 2)$, (voir Exercice 10.1 de E4). En introduissant les variables

$$\begin{aligned} u &= -x + y \\ v &= 3x - y - z \\ w &= -x + z \end{aligned}$$

calculer $\iiint_U (x + y) \, dV_{x,y,z}$