MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 9

A. ZEYTİN

(1) Soient $p_1 = (0,0,0)$, $p_2 = (1,2,-1)$ et

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ -3xy \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ où $\mathcal{C}$ est

- ▶ la courbe paramétrisée par $\gamma(t) = (t^2, 2t, -t)$ de p_1 à p_2, et
- ▶ le segment de droite joignant p_1 à p_2.

Ce champ vectoriel est-il conservatif?

(2) Décider si les champs vectoriels suivants sont conservatifs. Dans l'affimative, déterminer le potentiel associé :

- ▶ $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y+3 \\ x^3 \end{pmatrix}$
- ▶ $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^3} \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$
- ▶ $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$
- ▶ $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^y \\ xe^y \\ (z+1)e^z \end{pmatrix}$
- ▶ $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \tan(y) \\ x\sec^2(y) \end{pmatrix}$

(3) Véfirier théorème fondamentale d'intégrales curvilignes pour les champs vectoriels et courbes suivants:

- ▶ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; où C est la droite de $(0,e)$ à $(1, \ln(2))$ et
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy} \end{pmatrix}.$$
- ▶ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; où C est la droite de $(1,2)$ à $(3,4)$ et
$$\mathbf{F}(x.y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - y^3 \\ 6x^2y - 3xy^2 \end{pmatrix}.$$
- ▶ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; où C est la courbe paramétrisée par $\gamma(t) = (2t^2+1, 2t+2)$ pour $t \in [0,1]$, et
$$\mathbf{F}(x.y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - y^3 \\ 6x^2y - 3xy^2 \end{pmatrix}.$$
- ▶ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; où C est la courbe paramétrisée par $\gamma(t) = (t^2, 2t)$ où $t \in [0,1]$ et
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{1+x^2} \\ 2y\arctan(x) \end{pmatrix}.$$

(4) ► Trouver un potentiel, disons f, pour le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}$$

► Paramétriser la courbe d'intersection du cône $x = \sqrt{y^2+z^2}$ avec le cylindre $(y-1)^2+z^2 = 1$ située dans le premier octant orientée en sens de parcours correspondra à x decroissant.

► Calculer $\int_{\mathcal{C}} yz^2\,dx + xz^2\,dy + (2xyz + 2x + 2y)\,dz$ en utilisant le potentiel f.

(5) Considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ \alpha x^2 y \\ 0 \end{pmatrix}$$

► Déterminer la valeur de α telle que $\mathbf{F}$ est conservatif.

► Pour cette valeur de α trouver un potentiel de $\mathbf{F}$.

► Par $\mathcal{C}$ on désigne la courbe paramétrisée par $\gamma(t) = (1+\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, \pi/2]$. En choisissant la valeur de α pour laquelle $\mathbf{F}$ est conservatif, calculer $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(6) Considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(z) + ye^x \\ e^x \\ x^2\cos(z) \end{pmatrix}$$

► Le champ $\mathbf{F}$ est-il conservatif? Si oui, déterminer un potentiel.

► Paramétriser la courbe d'intersection du paraboloïde $y = x^2 + z^2$ avec le plan $y = 3$ joignant le point $p_1 = (-\sqrt{3}, 3, 0)$ au point $p_2 = (\sqrt{3}, 3, 0)$ située dans la région $z \geq 0$.

► Calculer $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(7) (le champ gravitationnel) On considère le champ gravitationnel

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -m_1 m_2 g \begin{pmatrix} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \\ \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \\ \frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \end{pmatrix};$$

où m_1, m_2 sont les masses des corps et g la constante gravitationnelle. Montrer que $\mathbf{F}$ est conservatif.