

MATH 201

ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

Ayberk Zeytin

1. Calculer la limite de la fonction $f(x)$ en point indiqué si elle existe. (N'appliquez pas la règle de l'Hôpital.)

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $x = 0$.

(b) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $x = 0$.

(c) $f(x) = \frac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$, $x = \frac{1}{2}$.

(d) $f(x) = \frac{x-x\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}+3x-4}$, en $+\infty$.

(e) $f(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$, $x = -2$.

2. Calculer la limite de la fonction $f(x)$ en point indiqué si elle existe. (Vous pouvez appliquer la règle de l'Hôpital.)

(a) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$, $x = 1$.

(b) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)}$, $x = 0$.

(c) $f(x) = \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(2x)}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

(d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, en $+\infty$.

(e) $f(x) = \frac{8^x-5^x}{x}$, $x = 0$.

3. Trouver la domaine de définition des fonctions suivantes et étudier ses continuités. Peut-on les prolonger par continuité?

(a) $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $f(x) = \frac{x^3-5x+2}{x^3+8}$

(c) $f(x) = \frac{x+1+|x+5|}{|3-x|+2x}$

4. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on définit l'application réelle f_α comme suit:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Décider si l'application f_α est continue et dérivable pour $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

5. Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = x^2 \sin(x) \cos(x)$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sec(x)}$

(c) $f(x) = \sin(\sin(\sin(x^2)))$

(d) $f(x) = 3^x$

(e) $f(x) = e^{\sin(x)+x^4}$

(f) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 \sin^3(x)}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

(g) $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$

(h) $f(x) = x^x$

(i) $f(x) = x^{\tan(x)}$

(j) $f(x) = \ln(x)^{\cos(x)}$

(k) $f(x) = \arccos(x+2)$

(l) $f(x) = \arctan(x^2)$

6. Calculer les limites suivantes: (Indication: Essayez d'appliquer la règle de la chaîne)

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x^3) - \sin(a^3)}{x-a}$ où $a \in \mathbb{R}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{9x^2 + 12x - 192}{x-4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 243}{x+3}$

7. Étudier la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x - x^5) \end{aligned}$$

et tracer sa courbe représentative.

8. Soient f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues sur $[0, 1]$ et que $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = kg(x_0).$$

9. Montrer que $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$.