MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 10

A. ZEYTİN

(1) Calculer les dérivées partielles du premier ordre de f où:
- $f(x,y) = e^{-y}\cos(\pi x)$
- $f(x,y) = \sqrt{x}\ln(y)$
- $f(x,y) = \tan(xy)$
- $f(x,y) = \int_x^y \sqrt{t^3+1}\,dt$
- $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$

(2) Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$
- Trouver $f_x(x,y)$ et $f_y(x,y)$ si $(x,y)\neq(0,0)$
- Trouver $f_x(0,0)$ et $f_y(0,0)$
- Montrer que $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

(3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes:
- $f(x,y) = \sin^2(mx+ny)$ où $(m,n)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$
- $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(4) Montrer que la fonction $f(x,y)=\ln(e^x+e^y)$ est une solution des équations différentielles suivantes:
- $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=1$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=0$

(5) Calculer les dérivées partielles indiquées de f où:
- $f(x,y)=e^{xy}\sin(y)$, f_{yxx}
- $f(x,y,z)=x\sqrt{y-z}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$
- $f(x,y,z)=\frac{x}{y+2z}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$

(6) Déterminer une équation du plan tangent en P de la fonction f où :
- $f(x,y)=3y^2-2x^2+x$, $P=(2,-1)$
- $f(x,y)=\sqrt{xy}$, $P=(1,1)$
- $f(x,y)=xe^{xy}$, $P=(2,0)$
- $f(x,y)=x\sin(x+y)$, $P=(-1,1)$
- $f(x,y)=\ln(x-2y)$, $P=(3,1)$

(7) Trouver les dérivées directionnelles de f en point P en direction du vecteur $\vec{u}$ où:
- $f(x,y)=\sin(2x+3y)$, $\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $P=(-6,4)$
- $f(x,y)=\frac{y^2}{x}$, $\vec{u}=\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $P=(1,2)$
- $f(x,y,z)=x^2yz-xyz^3$, $\vec{u}=\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$, $P=(2,-1,1)$
- $f(x,y,z)=y^2e^{xyz}$, $\vec{u}=\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)$, $P=(0,1,-1)$

(8) Calculer le vecteur gradient de

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$$

et de

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sin(x_1+2x_2+\ldots+nx_n).$$