MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 11

A. ZEYTİN

(1) Calculer le vecteur gradient de f et trouver la dérivée directionnelle de f en point P en direction du vecteur $\vec{u}$ où:
- ▶ $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$, $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $P = (1,2)$
- ▶ $f(x,y,z) = y^2 e^{xyz}$, $\vec{u} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$, $P = (0,1,-1)$

(2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial s}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ où:
- ▶ $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$, $f(x,y) = x^2y^3$
- ▶ $x = st^2$, $y = s^2t$, $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$
- ▶ $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$, $f(x,y) = \arcsin(x-y)$

(3) On pose $x = e^s\cos(t)$ et $y = e^s\sin(t)$. Si $u = f(x,y)$, alors montrer que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right].$$

(4) **Définition:** Soit n un entier positif. Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré n si

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$.
- ▶ Montrer que la fonction $f(x,y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ est homogène de degré 3.
- ▶ (L'identité d'Euler) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré n. Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y).$$

(5) Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & xyz + x^2 + y^2 \end{array}$$

Montrer qu'il existe un nombre réel $\theta \in (0,1)$ tel que

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = f_x(\theta,\theta,\theta) + f_y(\theta,\theta,\theta) + f_z(\theta,\theta,\theta).$$

(*Indication*: Essayer de construire une fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ et appliquer le théorème des accroissements finis.)

(6) Soit $f : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un boule ouvert B dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en tout point de B. Soient $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{b} = (b_1, b_2) \in B$. Montrer qu'il existe $\bar{p}, \bar{q} \in B$ tel que

$$f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{p})(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{q})(b_2 - a_2).$$

(7) (Contre-exemple au théorème de Schwarz)

On definit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- ▶ Montrer que f est continue en $(0,0)$.
- ▶ Calculer, pour $(x,y) \neq (0,0)$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et en déduire $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
- ▶ Calculer, pour $x \neq 0$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ et en déduire la limite quand x tend vers 0 . Comment note-t-on cette limite?
- ▶ Calculer, pour $(x,y) \neq (0,0)$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et en déduire $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
- ▶ Calculer, pour $y \neq 0$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ et en déduire la limite quand y tend vers 0 . Comment note-t-on cette limite?

- Calculer, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$. Cette dérivée seconde admet-elle une limite en $(0, 0)$?
- Calculer, pour $x \neq 0$,
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x}$$
et en déduire sa limite quand x tend vers 0. Comment note-t-on cette limite?
- Calculer, pour $y \neq 0$,
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y}$$
et en déduire sa limite quand y tend vers 0. Comment note-t-on cette limite?
- Rappeler le théorème de Schwarz. Pourquoi ne s'applique-t-il pas ici ?