MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 12

A. ZEYTİN

(1) Donner la linéarization de f en P où:
- $f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$, $P = (2,3)$
- $f(x,y) = x^3y^4$, $P = (1,1)$
- $f(x,y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $P = (3,0)$
- $f(x,y) = y + \sin\left(\frac{x}{y}\right)$, $P = (0,3)$
- $f(x,y) = e^{-xy}\cos(y)$, $P = (\pi, 0)$

(2) On définit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sin(\sqrt{x^2+y^2})} & \text{si } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \pi \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Montrer que f n'est pas dérivable en $(0,0)$.

(3) On définit $f(x,y) = \begin{cases} |xy|\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Montrer que f est dérivable en $(0,0)$.

(4) Montrer que si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $(a,b) \in U$, alors f est continue en (a,b).

(5) On définit $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
- Quel est le domaine de définition de f?
- Décider si la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.
- On suppose que $f(0,0) = 0$. Décider si f est dérivable en $(0,0)$.
- Montrer que f est dérivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(6) Décider si les séries suivantes convergent. Si elle converge, déterminer sa limite.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$
- $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{243} + \frac{2}{729} + \dots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(1/n^2\right) - \cos\left(1/(n+1)^2\right)\right)$

(7) (Teste de série-p) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente si $p > 1$ et est divergente si $0 \leq p \leq 1$.

(8) Décider si les séries suivantes convergent.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0.9999}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+13}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(9) (Teste de comparaison limite) Soient a_n, b_n deux suites positives telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, \infty]$. Montrer que

- Si $L \in (0, \infty)$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
- Si $L = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $L = \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(10) Décider si les séries suivantes convergent.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2(n)}{1+n^3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^{1.2}}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

(11) Décider si les séries suivantes convergent.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}n!}{4^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+1}n^2}{2^{2n}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$