

# MATH 201

## ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

Ayberk Zeytin

1. (Inégalité de Schwarz) Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que

$$|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

2. Soient  $u_1$  et  $u_2$  des vecteurs orthogonaux et non nuls dans  $\mathbb{R}^2$ . On suppose qu'il existe des nombres réels  $c_1$  et  $c_2$  tels que

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = (0, 0).$$

Montrer que  $c_1 = c_2 = 0$ .

3. Soient  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  des vecteurs non nuls dans  $\mathbb{R}^3$  deux à deux perpendiculaires. On suppose qu'il existe des nombres réels  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  tels que

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = (0, 0, 0).$$

Montrer que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

4. Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que si  $\theta$  est l'angle entre  $u$  et  $v$ , alors

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta.$$

5. Trouver la projection orthogonale du vecteur  $(-3, 2)$  sur la droite passant par  $(0, 0)$  avec le vecteur directeur  $(1, 3)$ .

6. Trouver les équations des droites suivantes:

- (a) La droite passant par les points  $P_1 = (1, 2)$  et  $P_2 = (-1, 4)$ .
- (b) La droite passant par le point  $(6, -5, 2)$  et parallèle au vecteur  $(1, 3, \frac{-2}{3})$ .
- (c) La droite passant par le point  $(0, 14, -10)$  et parallèle à la droite  $x = -1 + 2t$ ,  $y = 6 - 3t$ ,  $z = 3 + 9t$ .
- (d) La droite passant par le point  $(1, 0, 6)$  et perpendiculaire au plan  $x + 3y + z = 5$ .
- (e) La droite passant par les points  $P_1 = (0, \frac{1}{2}, 1)$  et  $P_2 = (2, 1, -3)$ .

7. Trouver les équations des plans suivants:

- (a) Le plan contenant le point  $(0, 0, 0)$  et perpendiculaire au vecteur  $(1, -2, 5)$ .
- (b) Le plan contenant le point  $(5, 3, 5)$  avec le vecteur normal  $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ .
- (c) Le plan contenant le point  $(2, 0, 1)$  et perpendiculaire à la droite  $x = 3t, y = 2 - t, z = 3 + 4t$ .
- (d) Le plan contenant le point  $(1, -1, -1)$  et parallèle au plan  $5x - y - z = 6$ .
- (e) Le plan contenant les points  $(0, 1, 1), (1, 0, 1)$  et  $(1, 1, 0)$ .
- (f) Le plan contenant le point  $(1, 2, 3)$  et la droite  $x = 3t, y = 1 + t, z = 2 - t$ .
- (g) Le plan contenant le point  $(-1, 2, 1)$  et la droite d'intersection des plans  $x + y - z = 2$  et  $2x - y + 3z = 1$ .

8. Trouver les équations (paramétriques ou symétriques) de la droite d'intersection des plans:

- (a)  $x + y + z = 1, x + 2y + 2z = 1$
- (b)  $3x - 2y + z = 1, 2x + y - 3z = 3$
- (c)  $5x - 2y - 2z = 1, 4x + y + z = 6$
- (d)  $z = 2x - y - 5, z = 4x + 3y - 5$