MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Décider si les ensembles donnés sont ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^2$:
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ où $r, R \in \mathbb{R}$ avec $0 < r < R$.
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4x$ et $y > 0\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0$ et $x \neq 0\}$
- $X = \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

(2) Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $A_k := \left\{\frac{1}{k}\right\}$.
- Montrer que A_k est fermé pour tout $k \geq 1$.
- Déterminer $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ et décider si $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
- Que peut-on dire pour l'ensemble $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \cup \{0\}$?

(3) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{k}\right\}$.
- Montrer que $\cap_{k=1}^{m} A_k$ est ouvert pour tout entier naturel $m \geq 1$.
- Déterminer $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ et montrer que $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ n'est pas ouvert.

(4) Soient A, B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On définit

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{R}^3 : a \in A, b \in B\}$$

Quand l'ensemble A est un singleton, disons $A = \{a\}$, on note l'ensemble $A + B$ par $a + B$.
- Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que $a + U$ est ouvert pour tout $a \in A$.
- Montrer que $A + U$ est ouvert pour tout sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.
- Décider si on a les mêmes résultats quand A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Justifier votre réponse.
- Décider si on a les mêmes résultats quand A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. Justifier votre réponse.

(5) Décider si les ensembles donnés sont ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^3$:
- Le plan x, y
- $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$
- $X = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$
- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < x < b, c < y < d, e < z < f\}$ où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.
- $X = \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}^3$.