MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

Définition 0.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. La clôture de A, notée $\overline{A}$, est l'union de ses points d'accumulations et points isolés.*

(1) Déterminer $\overline{X}$:
- ▶ $X = (0, 1] \subset \mathbb{R}$
- ▶ $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\} \subset \mathbb{R}^2$
- ▶ $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ et } x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(2) Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
- ▶ $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Que peut on dire de l'inclusion $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$?
- ▶ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(3) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ contenant A.

(4) On pose $X = \{(n, 0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbf{Z}\}$. Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.
- ▶ Tout élément de X est un point isolé de X.
- ▶ Si X_1 l'ensemble de tous les points d'accumulations de X, alors $X_1 = \emptyset$.
- ▶ X est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

(5) Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. On pose $p = (0, 1)$ et $q = (0, 0)$.
- ▶ Est-ce que p un point isolé de X?
- ▶ Est-ce que q un point d'accumulation de X?

(6) Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Décider si X est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

(7) Soient A, B deux parties connexes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $A \cap B$ est non-vide, alors $A \cup B$ est connexe.