MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Déterminer $\mathrm{int}(X)$, $\mathrm{ext}(X)$ et ∂X:
- $X = (0, 1] \subset \mathbb{R}$
- $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \subset \mathbb{R}$
- $X = \left\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\} \subset \mathbb{R}^2$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ et } x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^2$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 3 \leq x \leq 5\} \subset \mathbb{R}^2$

(2) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{int}(A)$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A.

(3) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $A = \mathrm{int}(A)$.
- Montrer que A est fermé dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\partial A \subset A$.

(4) Soit A est une partie de $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que $\overline{A^c} = \mathrm{int}(A)^c$ et $\left(\overline{A}\right)^c = \mathrm{int}(A^c)$.
- Montrer que $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$.
- Que peut on dire de $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$?

(5) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $C \subset \mathbb{R}^n$ est connexe et que

$$\overline{A} \cap C \neq \emptyset \text{ et } \overline{(A^c)} \cap C \neq \emptyset,$$

alors C rencontre ∂A.

(6) Déterminer la limite des suites suivantes:
- $a_n = \left(\tan\left(\frac{2n\pi}{1+8n}\right), \frac{\cos^2(n)}{2^n}\right)$
- $a_n = \left(\frac{3+5n^2}{n+n^2}, \int_0^n e^{-t}\,dt\right)$
- $a_n = \left(\arctan(\ln(n)), \sqrt[n]{2^{1+3n}}, n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- $a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}, \left(1+\frac{2}{n}\right)^{5n}, \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{5n}\right)$ (Indication: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$)