MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A est fermé dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^n$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A.

(2) Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On définit
$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$
Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

(3) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}^n$ si $\overline{A} = \mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

(4) Trouver un recouvrement ouvert de X dont on ne peut pas extraire sous-recouvrement fini:
- $X = (1, 2)$
- $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$
- $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$
- $X = (0, \infty)$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

(5) Soit $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \cup \{0\}$. Montrer que de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

(6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit
$$A_n = \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \subset \mathbb{R}.$$
Décider si la famille $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est un recouvrement ouvert de $(0, 1)$. Si elle l'est, peut-on en extraire un sous-recouvrement fini?

(7) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement fini. Soit B une partie fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que de tout recouvrement ouvert de B, on peut extraire un sous-recouvrement fini.