MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) Trouver recouvrements ouverts infinis des ensembles suivants qui ne possède pas de sous recouvrements finis:
- $(-1, 4)$
- $(-1, 4]$
- $(-1, 4) \times (1, 3)$
- $(-1, 4) \times [1, 3]$

(2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact dans $\mathbb{R}$.

(3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que le segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact.

(4) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si A est compact, alors A est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

(5) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si A est compact, alors A est borné .

(6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
- Montrer que pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
- Montrer que si A est une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors $f(A)$ est compact.

(7)
- Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A \cup B$ est compacte. En déduire que l'union finie des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est compacte.
- Que peut-on dire de l'union infinie des parties compactes de $\mathbb{R}^n$?