MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 8

A. ZEYTİN

(1) Décider si les ensembles suivants sont compacts:
- $X = \{1\} \cup \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\right\}$
- $X = \mathbb{Z} \cap [0, 10]$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x = \cos(y)\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$

(2) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:
- $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
- $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
- $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$
- $f(x, y) = \ln(xy - 1) + e^{x^2 y} - y^8$

(3) Donner une description géometrique des lignes de niveau des fonctions suivantes :
- $f(x, y) = x^2$
- $f(x, y) = 4x^2 + y^2$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 6$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$

(4) Soit U une partie non-vide, ouverte et connexe de $\mathbb{R}^2$. Soient $f, g : U \to \mathbf{R}$ deux fonctions, $(a_1, a_2) \in \operatorname{int}(U)$ avec

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1, x_2) = L \quad \text{et} \quad \lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} g(x_1, x_2) = M$$

Montrer que:
- $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}(f + g)(x_1, x_2) = L + M$
- $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}(f - g)(x_1, x_2) = L - M$
- $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}(fg)(x_1, x_2) = LM$
- $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}(\frac{f}{g})(x_1, x_2) = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$