MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 9

A. ZEYTİN

(1) Soient $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et $V \subseteq \mathbb{R}$. Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(U) \subseteq V$. Montrer que si f est continue en $(x_0, y_0) \in U$ et si g est continue en $f(x_0, y_0) \in V$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ est continue en (x_0, y_0).

(2) Calculer les limites suivantes, si elles existent:
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$
- $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2 x}{x^4+y^4}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sin^2 x}{x^4+y^4}$
- $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$
- $\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{y}{x} + \cos(xy)$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x+y}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2}\tan(xz)$
- $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

(3) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\}$. On définit

$$\begin{aligned} f : U &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} \end{aligned}$$

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$ existe pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(4) Étudier la continuité des fonctions suivantes:
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$