MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 11

A. ZEYTİN

(1) Montrer que l'aire des ensembles suivantes est zéro.
- ► $E = [3,4] \times \{2\}$
- ► $E = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right]$
- ► $E = \{-1\} \times [1,2]$

(2) Montrer que le volume des ensembles suivantes est zéro.
- ► $E = \{(t^2, t^3, 0) \mid t \in \mathbf{R}\}$
- ► $E = \{(t^2-1, 2, t^3-t) \mid t \in \mathbf{R}\}$
- ► $E = \{(1, \cos(t), \sin(t)) \mid t \in \mathbf{R}\}$
- ► $E = \{(x, y, f(x,y)) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ où $f(x,y) = x + y + x^2 + y^2 + 1$
- ► $E = \{(x, y, f(x,y)) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ où $f(x,y) = x^2 + y + xy$

(3) Calculer les intégrales suivantes sur la region délimitée :
- ► $\iiint_R 6xy\, dV$ où R est délimitées par le plan $z = 1 + x + y$ et les surfaces $y = \sqrt{x}, y = 0$ et $x = 1$
- ► $\iiint_R x^2\cos(y)\, dV$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq xz \text{ et } 0 \leq z \leq x\}$
- ► $\iiint_R 3 + 2xy\, dV$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ et } z \geq 0\}$
- ► $\iiint_R 2xz\cos(y^5)\, dV$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } y \leq z \leq 2y\}$
- ► $\iiint_R xy\, dV$ où R est délimitées par les plans $z = 0$ et $z = x + y$ et les surfaces $y = 3x^2$ et $x = 3y^2$
- ► $\iiint_R ze^{x^2+y^2}\, dV$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16 \text{ et } 4 \leq z \leq 5\}$

(4) En utilisant les coordonées cylindriques calculer les intégrales suivantes :
- ► $\iiint_R \sqrt{y^2 + x^2}\, dV$ où R est délimitées par le paraboloïde $x^2 + y^2 - z = 16$ et le plane xy
- ► $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\, \partial z \partial y \partial x$
- ► $\iiint_R e^{-x^2-z^2}\, dV$ où R est délimitée par les cylindres $x^2 + z^2 = 16$ et $x^2 + z^2 = 25$ avec $1 \leq y \leq 6$ et $z \leq 0$

- ► $\iiint\limits_R 9yz^3\, dV$ où R est délimitée par $x = -\sqrt{9y^2 + 9z^2}$, $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ et $y^2 + z^2 = 1$
- ► $\iiint\limits_R x^2 + xy^2\, dV$ où R est délimitée par $z = 1 - x^2 - y^2$ et $x, y, z \geq 0$
- ► $\iiint\limits_R e^z\, dV$ où R est délimitée par $z = 1 + x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 5$ et le plan xy

(5) En utilisant coordonées sphèriques calculer les intégrales suivantes :

- ► $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}\, \partial z \partial y \partial x$
- ► $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \partial z \partial y \partial x$
- ► $\displaystyle\iiint\limits_R \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}\, dV$ où $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- ► $\iiint\limits_R (9 - x^2 - y^2)\, dV$ où R est un hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$
- ► $\iiint\limits_R 2 + 16x\, dV$ où R est délimitée par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ avec $y \geq 0, z \leq 0$

(6) Calculer le volume des regions délimitée par :

- ► le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et le sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- ► le cylindre $x^2 + y^2 = 16$ et les plans $z = 2$ et $x + z = 4$
- ► le paraboloïde $y = x^2 + z^2$ et le plan $y = 16$
- ► le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et la surface $x^2 + y^2 + z^2 = z$
- ► le plan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
- ► les cônes $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$