# MATH 201
# ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

(1) Calculer la limite de la fonction $f(x)$ en le point indiqué si elle existe.(N'appliquez pas la règle de l'Hôpital.)

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sin^3(x)}$ en $0$
- $f(x) = \ln(1+|x|)$ en $0$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)-\sin(3x)}{\sin(x)+\sin(3x)}$ en $0$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$ en $+\infty$
- $f(x) = \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$ en $0$
- $f(x) = \dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$ en $+\infty$
- $f(x) = \dfrac{x^3-5x-4}{x+1}$ en $-1$
- $f(x) = \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ en $0$

(2) Calculer les dérivées des fonctiones suivantes lorsqu'elles existent.

- $f(x) = \ln(e^{x^2}+1)$ si $x > 1$
- $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ x\ln(x) - x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right)$
- $f(x) = x^{x+1}$
- $f(x) = \sin(e^{x^2})$
- $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & b \leq x = 0 \end{cases}$

(3) Calculer les intégrales suivantes.

- $\displaystyle\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$
- $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$
- $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$
- $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\cos(4x)}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$

(4) Étudier les limites des suites suivantes.

- $U_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$
- $U_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $a, b \in \mathbf{R}_+^*$
- $U_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$
- $U_n = \dfrac{5n^2 + \sin(n)}{3(n+2)^2\cos(\frac{n\pi}{5})}$
- $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(5) Étudier la nature des séries de termes général suivants.

- $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n$
- $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
- $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- $a_n = \frac{1}{n^5+5n^3}$
- $a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n+1}$
- $a_n = n^{-\sin(\frac{\pi}{n})}$
- $a_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$
- $a_n = \frac{n^4}{3^n}$

(6) Déterminer la domaine de définition des fonctions suivantes.

- $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 5$
- $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+2x+1}$
- $f(x) = \sqrt{-x^2+6x-8}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3x+2}{x+1}}$
- $f(x) = \ln(x-2)$

(7) On considère l'application $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(i) Montrer que $f$ est continue sur $[-1, 1]$.
(ii) Montrer que $f$ est dérivable sur $(-1, 1)$ et déterminer $f'(x)$ sur $(-1, 1)$
(iii) Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer son graphe.