MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 11

A. ZEYTİN

(1) Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ en utilisant la définition :
- ▶ $f(x, y) = x + 2y$
- ▶ $f(x, y) = \alpha x + \beta y$; où $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ quelconque.
- ▶ $f(x, y) = x^2 + 2y$
- ▶ $f(x, y) = xy + 2y^2$
- ▶ $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$; où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ quelconque.

(2) Donner la défintion de dérivabilité pour fonctions de 3 variables. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en utilisant votre définiton :
- ▶ $f(x, y) = x + 2y + 3z$
- ▶ $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma z$; où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ quelconque.
- ▶ $f(x, y) = x^2 + 2y - z$

(3) Soient $f \colon D \to \mathbf{R}$ (où $D \subseteq \mathbf{R}^2$ une partie non-vide) une fonction de deux variables et $(a, b) \in \mathrm{Int}(D)(\neq \emptyset)$. Supposons que $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ existent et sont continues dans la boule $B((a, b), \varepsilon)$ pour certain $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tels que :

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_1(a + \theta_1 h, b) + kf_2(a + h, b + \theta_2 k)$$

(4) Donner un exemple d'une fonction de deux variables qui est continue en (a, b) mais qui n'est pas dérivable en (a, b).