MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Donner des points, un vecteur directeur et des équations paramétriques des droites comme suit:
- D_1 la droite d'équation $x - 4y = 8$
- D_2 la droite d'équation $y = 3x + 5$
- D_3 la droite passant par $A = (-1, 2)$ et $B = (3, 1)$
- D_4 la droite passant par $A = (-7, -2)$ et $B = (-2, -5)$
- D_5 la droite passant par $A = (0, 2)$ et $B = (-1, -1)$
- D_6 la droite passant par $A = (1, 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \langle 2, -3\rangle$

(2) Donner des points, un vecteur normal et des équations cartésienne des droites comme suit:
- D_1 la droite passant par $(3, 7)$ et de vecteur directeur $\langle 1, -1\rangle$
- $D_2 = \{t \in \mathbf{R} \mid (1, 4) + t(1, 0)\}$
- $D_3 = \{t \in \mathbf{R} \mid (2 + 3t, 4t)\}$
- D_4 la droite passant par $A = (-1, 1)$ et $B = (0, 1)$

(3) Écrire l'équation du plan
- passant par $(1, 2, 3)$, $(-1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$
- passant par $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$ et $(-1, 2, 4)$
- passant par $(1, 2, 3)$ et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
- passant par $(1, 2, 3)$ et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$
- passant par $(1, 2, 1)$ avec vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = \langle 4, 0, 3\rangle$ et $\langle 1, 3, -1\rangle$
- passant par $(0, 0, 0)$ et dans lequel la droite D est donnée par les équations $x+y-z+3 = 0$ et $4x-y+2z = 0$

(4) Soient $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 0)$ les points dans $\mathbf{R}^3$. Déterminer
- L'équation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$
- L'intersection de la droite D avec le plan d'équation $z = 0$
- L'équation cartésienne de la droite D

(5) Soient $\overrightarrow{a} = (2, 3, 1)$, $\overrightarrow{b} = (5, 0, 3)$, $\overrightarrow{c} = (0, 0, 3)$ et $\overrightarrow{d} = (-2, 2, 1)$ les poins dans $\mathbf{R}^3$. Trouvez :
- la projection de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$
- la projection de $\overrightarrow{c}$ sur $\overrightarrow{a}$
- la projection de $\overrightarrow{d}$ sur $\overrightarrow{a}$
- la projection de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{d}$

(6) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$:
- $\overrightarrow{u} = \langle 3, -1\rangle$ et $\overrightarrow{v} = \langle 2, -5\rangle$
- $\overrightarrow{u} = \langle 4, -5, 1\rangle$ et $\overrightarrow{v} = \langle 3, 6, -1\rangle$
- $\overrightarrow{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ et $\overrightarrow{v} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
- $\|\overrightarrow{u}\| = 3, \|\overrightarrow{v}\| = 4$ et l'angle between $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est $\frac{\pi}{4}$
- $\overrightarrow{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ et $\overrightarrow{v} = -3\mathbf{i} + 1,5\mathbf{j} - 7,5\mathbf{k}$

(7) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$:
- $\overrightarrow{u} = \langle 3, -1, 5\rangle$ et $\overrightarrow{v} = \langle 0, 4, -2\rangle$
- $\overrightarrow{u} = \langle 1, 6, -8\rangle$ et $\overrightarrow{v} = \langle 4, -2, -1\rangle$
- $\overrightarrow{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ et $\overrightarrow{v} = \langle 4, -1, -6\rangle$

- $\overrightarrow{u} = \langle 2, 1, -1\rangle$ et $\overrightarrow{v} = \langle -3, 4, 1\rangle$

(8) Rappelons que la distance d'un point à une droite correspond à la longeur du plus court segment séparant le point de la droite.

- Déterminer la distance qui sépare un point $P = (x_o, y_o)$ d'une droite D donée par l'équation $ax + by + c = 0$. Plus précisément, montrer que la distance entre P et D, $d(P, D)$, est :
$$d(P, D) = \frac{ax_o + by_o + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
- Quelle est la distance entre la droite d'équation $y = 4x - 5$ et le point $P = (5, 1)$?

(9) Rappelons que la distance d'un point à un plan correspond à la longeur du plus court segment séparant le point du plan.

- Déterminer la distance qui sépare un point $P = (x_o, y_o, z_o)$ d'un plan $\mathcal{P}$ donée par l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Plus precisement, montrer que la distance entre P et $\mathcal{P}$, $d(P, \mathcal{P})$, est :
$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{ax_o + by_o + cz_o + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
- Quelle est la distance entre la droite d'équation $4x + 5y - z = 5$ et le point $P = (-1, 3, 2)$?

(10) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$ dans $\mathbf{R}^n$, montrez que

- $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}$
- $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$
- $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = ||x||^2$
- $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}||.||\overrightarrow{y}||.\cos(\theta)$ où θ est l'angle entre $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$
- $||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 = ||\overrightarrow{x}||^2 + 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + ||\overrightarrow{y}||^2$
- $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \leq ||\overrightarrow{x}||.||\overrightarrow{y}||$

(11) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$ dans $\mathbf{R}^n$, montrez que

- $(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) \perp \overrightarrow{x}$ et$(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) \perp \overrightarrow{y}$
- $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x}$
- $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \times \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z}$
- $\overrightarrow{x} \times (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{z}$
- $(\lambda \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \times (\lambda \overrightarrow{y}) = \lambda (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y})$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ constant.