# MATH 201
# ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Montrer que les ensembles suivants sont ouverts dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^n$:
- pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ quelconque, $B(x, \varepsilon)$
- pour $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$ avec $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ l'ensemble $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$
- plus généralement pour $a_i, b_j \in \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ avec $a_i < b_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, l'ensemble $X = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbf{R}^n$
- $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < a, \;\; y < b\}$.
- plus généralement pour $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$,
$$X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbf{R}^n$$

(2) Montrer que les ensembles suivants sont fermé dans $\mathbf{R}^2$:
- pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ quelconque, $B[x, \varepsilon]$
- pour $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$ avec $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ l'ensemble $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
- plus généralement pour $a_i, b_j \in \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ avec $a_i < b_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, l'ensemble $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$
- $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq a, \;\; y \geq b\}$.
- plus généralement pour $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$,
$$X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leq x_i \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

(3) Dans $\mathbf{R}$ les ensembles suivants sont-ils ouverts? fermés?
- $\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Q}$

(4) Dans $\mathbf{R}^2$ dessinez les ensembles suivantes. Sont-ils ouverts? fermés?
- $B((1, 0), 2)$
- $B(0, 2) - B(0, 1)$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0, 2], y \in ]-1, 1[\,\}$
- $(\mathbf{Q} \cap (0, 1)) \times (\mathbf{Q} \cap (0, 1))$
- $(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbf{Q} \cap [0, 1])$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x - 1| < 1\}$

(5) Les ensembles suivants, sont-ils ouverts? fermés?
- $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \notin \mathbf{Q} \text{ ou } y \notin \mathbf{Q}\}$
- $E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Q} \text{ et } y \in \mathbf{Q}\}$
- $E_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$

(6) Dans $\mathbf{R}^3$ les ensembles suivants sont-ils ouverts? fermés?
- le plan d'équation $x + y + z = 1$
- l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ et } x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0\}$
- l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ et } x > 0, \; y > 0, \; z > 0\}$
- $[0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}$
- $(0, 1) \times (0, 1) \times \{0\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$

(7) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
- Si $\{X_i \mid i \in \mathbf{Z}_+\}$ est une famille de parties ouvertes de $\mathbf{R}^n$, alors $\cap_{n=1}^{\infty} X_i$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$
- Si $\{X_i \mid i \in \mathbf{Z}_+\}$ est une famille de parties ouvertes de $\mathbf{R}^n$, alors $\cup_{n=1}^{\infty} X_i$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$
- Si $\{X_i \mid i \in \mathbf{Z}_+\}$ est une famille de parties fermées de $\mathbf{R}^n$, alors $\cap_{n=1}^{\infty} X_i$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^n$
- Si $\{X_i \mid i \in \mathbf{Z}_+\}$ est une famille de parties fermées de $\mathbf{R}^n$, alors $\cup_{n=1}^{\infty} X_i$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^n$