MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Déterminer le frontière des ensembles suivantes:
- $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$
- $\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0 \text{ et } x \geq 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x < 2, 0 \leq y < 1\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > x^2 + y^2 - 1\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } z > 0\}$
- $\{\dfrac{n^2}{1 + n^2} \in \mathbf{R} \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$
- $\{\dfrac{1}{n} \in \mathbf{R} \mid n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$
- $\{(\dfrac{n^2}{1 + n^2}, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$
- $\{(1, \dfrac{1}{n}) \in \mathbf{R}^2 \mid n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$

(2) Déterminer si les ensembles suivantes sont connexes:
- $\mathbf{R} - \{2\}$
- $\mathbf{Q}$
- $\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$
- $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$
- $(0, 1) \times (0, 1)$ dans $\mathbf{R}^2$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$
- $[0, 1] \cup (2, 3]$
- $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 1, x \neq 0\}$

(3) Soit $Y \subset \mathbf{R}$. Montrer que si Y est connexe alors $\overline{Y}$ est connexe. L'inverse est-il nécessairement vrai? Expliquer.

(4) Soit K une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}$. Soit F une famille d'intervalles tel que tout point de K est intérieur à l'un des éléments de F. Montrez qu'il existe une sous-famille finie de F qui vérifie la même propriété.

(5) Les parties suivantes sont-elles compactes?
- $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}$
- $\left\{ \dfrac{(-1)^n n + 1}{2n + 1} \mid n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$
- $\left\{ \dfrac{(-1)^n n + 1}{2n + 1} \mid n \in \mathbf{Z}_+ \right\} \cup \left\{ \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2} \right\}$
- $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}_+} \left\{ \dfrac{1}{n} \right\} \times \left[0, \dfrac{1}{n} \right]$ dans $\mathbf{R}^2$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > x^2\}$

(6) Trouver un recouvrement ouvert de X dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini:
- $X = (1, 2)$
- $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$
- $X = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$
- $X = (0, \infty)$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$