

**MATH 201**  
**ÉNONCÉS DES EXERCICES 7**

A. ZEYTIN

(1) Calculer les limites suivantes si elles existent :

- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + 1}$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$
- ▶  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{x^4 + 2y^4 + z^4}$
- ▶  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 + z^2 z}{x^4 + 2y^4 + z^4 + 1}$

(2) Montrer que si  $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue en  $x = L$  et  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ , alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(f(x, y)) = L.$$

(3) Calculer les limites suivantes si elles existent :

- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x - y)}{\cos(x + y)}$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2)(\cos(x) - 1)}{x^3 + y^3}$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - e^x)^2}{x^2 + y^2}$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - e^{xy})^2}{x^2 + y^2}$

(4) Déterminer  $A$  tel que la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} f_0(x, y) & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ A & \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbf{R}^2$ ; où :

- ▶  $f_0(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$
- ▶  $f_0(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$
- ▶  $f_0(x, y) = \frac{\sin^2(x)e^y}{x^2 + y^2}$
- ▶  $f_0(x, y) = \frac{1 - e^{x^2 y}}{x^2 + y^2}$