MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 8

A. ZEYTİN

(1) Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
- ▶ $f(x, y) = e^{xy}\sin(x)$
- ▶ $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^y$
- ▶ $f(x, y) = \sqrt{e^x + e^y}$
- ▶ $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 e^y}$
- ▶ $f(x, y) = e^z \cos(xyz)$
- ▶ $f(x, y) = \sin(x + y + z)e^{xy+yz+xz}$
- ▶ $f(x, y) = \sqrt{e^x + e^y + e^z}$
- ▶ $f(x, y) = \sqrt{z + x^2 e^y}$

(2) On définit :

$$f(x, y) = \begin{cases} f_o(x, y) & \text{, si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Décider si les dérivées partielles de f existe en $(0, 0)$; où :
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{\sin^2(x)e^y}{x^2 + y^2}$
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{\sin(x - y)}{\cos(x + y)}$
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{(1 - e^x)^2}{x^2 + y^2}$
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{1 - e^{x^2 y}}{x^2 + y^2}$
- ▶ $f_o(x, y) = \dfrac{(1 - e^{xy})^2}{x^2 + y^2}$

(3) Identifier géométriquement et calculer les vecteurs tangents des courbes suivantes :
- ▶ $\gamma(t) = (t, t^2)$ pour $t \in [-1, 1]$
- ▶ $\gamma(t) = (t, \sin(t))$ pour $t \in [\pi/2, \pi/2]$
- ▶ $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$ pour $t \in [0, \pi]$
- ▶ $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$ pour $t \in [0, \pi]$
- ▶ $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ pour $t \in [0, \ln(5)]$
- ▶ $\gamma(t) = (t, 0, \cos(t))$ pour $t \in [\pi/2, \pi/2]$
- ▶ $\gamma(t) = (0, 2\cos(t), 2\sin(t))$ pour $t \in [0, \pi]$
- ▶ $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t), 0)$ pour $t \in [0, \pi]$
- ▶ $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), t)$ pour $t \in [0, 3\pi]$
- ▶ $\gamma(t) = (2\cos(t), t, 3\sin(t))$ pour $t \in [0, 5\pi]$
- ▶ $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ pour $t \in [0, 2]$
- ▶ $\gamma(t) = (t, 2t, 3t)$ pour $t \in [-1, 1]$
- ▶ $\gamma(t) = (2t - 1, 2t + 1, 3t - 2)$ pour $t \in [-1, 1]$

(4) Trouver une équation du plan tangent au point indiqué; où :

- $f(x,y) = \sqrt{1+(x-1)^2+y^2}$ en $(x_o, y_o) = (0,0)$
- $f(x,y) = (x+y)\cos(\pi x)$ en $(x_o, y_o) = (1,2)$
- $f(x,y) = e^{(x+y)}\sin(\pi x)$ en $(x_o, y_o) = (,)$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en $(x_o, y_o) = (-1,2)$
- $f(x,y) = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$ en $(x_o, y_o) = (,)$; où $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
- $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $(x_o, y_o) = (-1,2)$
- $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$ en $(x_o, y_o) = (0, -\pi/4)$

(5) Soit f, g deux fonctions de n variables dont les dérivées partielles existent en $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Montrer que :

- $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i}|_{X=A} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}|_{X=A} + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}|_{X=A}$
- $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}|_{X=A} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}_{X=A} g(A) + f(A)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}|_{X=A}$
- $\dfrac{\partial\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}|_{X=A}\, g(A) + f(A)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}|_{X=A}}{(g(A))^2}$