MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 9

A. ZEYTİN

(1) Soit f, g deux fonctions de n variables dont les dérivées partielles existent en $A = (a_1, \dots, a_n)$. Montrer que :

- $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}|_{X=A} = \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{X=A} + \frac{\partial g}{\partial x_i}|_{X=A}$
- $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}|_{X=A} = \frac{\partial f}{\partial x_i}_{X=A} g(A) + f(A)\frac{\partial g}{\partial x_i}|_{X=A}$
- $\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{X=A} g(A) + f(A)\frac{\partial g}{\partial x_i}|_{X=A}}{(g(A))^2}$

(2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 et 3 des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = e^{xy}\sin(x)$
- $f(x,y) = (x^2+y^2)e^y$
- $f(x,y) = \sqrt{e^x+e^y}$
- $f(x,y) = \sqrt{1+x^2e^y}$
- $f(x,y) = e^z\cos(xyz)$
- $f(x,y) = \sin(x+y+z)e^{xy+yz+xz}$
- $f(x,y) = \sqrt{e^x+e^y+e^z}$
- $f(x,y) = \sqrt{z+x^2e^y}$

(3) On définit :

$$f(x,y) = \begin{cases} f_o(x,y) & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Décider si les dérivées partielles d'ordre 2 de f existe en $(0,0)$; où :

- $f_o(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $f_o(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$
- $f_o(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$
- $f_o(x,y) = \frac{\sin^2(x)e^y}{x^2+y^2}$
- $f_o(x,y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$
- $f_o(x,y) = \frac{(1-e^x)^2}{x^2+y^2}$
- $f_o(x,y) = \frac{1-e^{x^2y}}{x^2+y^2}$
- $f_o(x,y) = \frac{(1-e^{xy})^2}{x^2+y^2}$

(4) Calculer les dérivées directionnels des fonctions suivantes en direction du vecteur indiqué :

- $f(x,y) = e^{xy}\sin(x)$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
- $f(x,y) = e^{xy}\sin(x)$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

- $f(x,y) = e^{xy}\sin(x)$, $\overrightarrow{u} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $f(x,y) = (x^2+y^2)e^y$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $f(x,y) = (x^2+y^2)e^y$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $f(x,y) = \sqrt{e^x+e^y}$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $f(x,y) = \sqrt{1+x^2e^y}$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
- $f(x,y,z) = e^z\cos(xyz)$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{24}{25}, 0, -\frac{7}{25}\right)$
- $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)e^{xy+yz+xz}$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$
- $f(x,y,z) = \sqrt{e^x+e^y+e^z}$, $\overrightarrow{u} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
- $f(x,y,z) = \sqrt{z+x^2e^y}$, $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(5) Calculer $\nabla \cdot f$ où :
- $f(x,y) = \sqrt{1+(x-1)^2+y^2}$
- $f(x,y) = (x+y)\cos(\pi x)$
- $f(x,y) = e^{(x+y)}\sin(\pi x)$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$
- $f(x,y) = x^2-y^2$
- $f(x,y) = \sin(x+y)+\cos(x-y)$
- $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)e^{xy+yz+xz}$
- $f(x,y,z) = \sqrt{e^x+e^y+e^z}$
- $f(x,y,z) = \sqrt{z+x^2e^y}$

(6) Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction pour laquelle la dérivé partielles f_x et f_y existent pour tout $(x,y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$. Trouver
- $\frac{\partial}{\partial x}f(2x+1, 3y-1)$
- $\frac{\partial}{\partial x}f(x+y, x-y)$
- $\frac{\partial}{\partial x}f(x^2+y^2, xy)$
- $\frac{\partial}{\partial x}f(\sin(x+y), e^{x+y})$

en termes de dérivées partielles de f.

(7) Soit $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction pour laquelle la dérivé partielles f_x et f_y existent pour tout $(x,y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$. Posons $x(s,t) = 2s-t$ et $y(s,t) = s+2t$. Trouver :
- f_s
- f_t
- $f_{s,s}$
- $f_{s,t}$
- $f_{t,s}$
- $f_{t,t}$
- $f_{s,t,s}$
- $f_{s,t,t}$

en termes de dérivées partielles de f.