MATH 202
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Dans cet exercice on va donner des approximations à $\sin(3)$ en utilisant séries de Taylor ayant différents centres.
- ▶ Donner une approximation à $\sin(3)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $\sin(x)$ de centre 0 de degré 3.
- ▶ Donner une approximation à $\sin(3)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $\sin(x)$ de centre 0 de degré 5.
- ▶ Donner une approximation à $\sin(3)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $\sin(x)$ de centre 0 de degré 7.
- ▶ Donner une approximation à $\sin(3)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $\sin(x)$ de centre π de degré 3.
- ▶ Donner une approximation à $\sin(3)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $\sin(x)$ de centre π de degré 5.
- ▶ Donner une approximation à $\sin(3)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $\sin(x)$ de centre π de degré 7.
- ▶ En utilisant théorème de Taylor, déterminer un majorant pour l'erreur absolue des votre calculs.
- ▶ En utilisant une calculatrice, déterminer l'erreur des votre calculs et comparer les erreurs.

(2) Considérons $f(x) = \cos(x)$.
- ▶ Déterminer la série de Taylor de f de centre $\pi/2$.
- ▶ Donner une approximation à $\cos(1)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 0 de degré 2.
- ▶ Donner une approximation à $\cos(1)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 0 de degré 4.
- ▶ Donner une approximation à $\cos(1)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 0 de degré 6.
- ▶ Donner une approximation à $\cos(1)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre $\pi/2$ de degré 2.
- ▶ Donner une approximation à $\cos(1)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre $\pi/2$ de degré 4.
- ▶ Donner une approximation à $\cos(1)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre $\pi/2$ de degré 6.
- ▶ En utilisant théorème de Taylor, déterminer un majorant pour l'erreur absolue des votre calculs.
- ▶ En utilisant une calculatrice, déterminer l'erreur des votre calculs et comparer les erreurs.

(3) Considérons $f(x) = \ln(x)$.
- ▶ Déterminer la série de Taylor de f de centre 1.
- ▶ Déterminer la série de Taylor de f de centre e.
- ▶ Donner une approximation à $\ln(2)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 1 de degré 3.
- ▶ Donner une approximation à $\ln(2)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 1 de degré 5.
- ▶ Donner une approximation à $\ln(2)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 1 de degré 7.
- ▶ Donner une approximation à $\ln(2)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre e de degré 3.
- ▶ Donner une approximation à $\ln(2)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre e de degré 5.
- ▶ Donner une approximation à $\ln(2)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre e de degré 7.
- ▶ En utilisant théorème de Taylor, déterminer un majorant pour l'erreur absolue des votre calculs.
- ▶ En utilisant une calculatrice, déterminer l'erreur des votre calculs et comparer les erreurs.

(4) Considérons $f(x) = \sqrt[3]{(}x)$.
- ▶ Déterminer la série de Taylor de f de centre 8.
- ▶ Donner une approximation à $\sqrt[3]{(}9)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 1 de degré 3.
- ▶ Donner une approximation à $\sqrt[3]{(}9)$ en utilisant le polynôme de Taylor de $f(x)$ de centre 1 de degré 5.
- ▶ En utilisant théorème de Taylor, déterminer un majorant pour l'erreur absolue des votre calculs.
- ▶ En utilisant une calculatrice, déterminer l'erreur des votre calculs et comparer les erreurs.

(5) En utilisant le série de Taylor des fonctions calculer les limites suivantes :

- ▶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
- ▶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2}{x^3}$
- ▶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x + x^3/3}{x^5}$
- ▶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1 + x^2}{x^4}$
- ▶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2) - e^{x^4}}{\sin(x^4)}$
- ▶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x\sin(x)}{(\ln(1+x))^4}$

(6) ▶ Calculer une approximation à $\pi/4$ en utilisant la série de Taylor de $\arctan(x)$ autour de 0.
▶ Montrer que $\arctan(1) = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$
▶ Donner une autre approximation à $\pi/4$ en utilisant l'indentite précédent.
▶ Comparer les erreurs de votre calculs.

(7) Calculer $f^{(n)}(c)$ pour les fonctions suivantes :
▶ $f(x) = x^2e^{3x}$, $n = 101$, $c = 0$
▶ $f(x) = \cos(x^2)$, $n = 204$, $c = 0$

(8) Déterminer le polynôme de Taylor de degré 3 en centre donné des fonctions suivantes :

▶ $\sin(x+y)$, $c = (0, \pi/2)$
▶ $\arctan(xy)$, $c = (0, 0)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{xy + x^2}{1 + \sin^2(y)}$, $c = (2, 0)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{xy + x^2}{1 + \sin^2(y)}$, $c = (2, \pi/2)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{xy + x^2}{1 - xy}$, $c = (0, 0)$
▶ $f(x,y,z) = xy^2e^{z^3}$, $c = (1, -1, 1)$
▶ $f(x,y) = \ln(x + y^2)$, $c = (1, 2)$
▶ $f(x,y,z) = \dfrac{1}{1 + xyz}$

(9) Calculer le développement en séries entières en centre donné, c, des fonctions suivantes :

▶ $f(x,y) = \dfrac{\sin(y)}{1-x}$ en $c = (0, 0)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{\sin(y)}{1-x}$ en $c = (0, \pi)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{\sin(y)}{1-x}$ en $c = (1/2, 0)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{\cos(x^2)}{e^{-y}}$ en $c = (0, 0)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{\cos(x^2)}{e^{-y}}$ en $c = (\pi/2, 0)$
▶ $f(x,y) = \dfrac{\cos(x^2)}{e^{-y}}$ en $c = (0, 1)$
▶ $f(x,y) = e^{x^2+y}$ en $c = (0, 1)$
▶ $f(x,y) = e^{x^2+y}$ en $c = (2, 0)$
▶ $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ en $c = (0, 0)$
▶ $f(x,y,z) = z\cos(x^2 + y^2)$ en $c = (0, 0, 0)$