

## MATH 202 ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYİN

(1) Déterminer et la matrice hessienne des fonctions suivantes :

▶  $f(x, y) = e^x + \frac{1}{xy}$

▶  $f(x, y) = \sin(x + y) \cos(x - y)$

▶  $f(x, y, z) = \sin(xyz) + x^2y\sqrt{z}$

▶  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$

▶  $f(x, y, z) = x^2 + 5z^2 - xyz + 2yz$

▶  $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2}$

▶  $f(x, y, z) = \ln(x^2yz) + \sqrt{x^2 + z^2}$

▶  $f(x, y) = 2^{x^2+z^2} + \tan(x + y + z)$

▶  $f(x, y, z) = \frac{e^{xz}}{x^3 + y^3 + 1}$

(2) Déterminer la nature (c'est-à-dire définie positive, définie négative ou indéfinie) des formes quadratiques suivantes :

▶  $Q(x, y) = 3x^2 + 5xy - 7y^2$

▶  $Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 7y^2$

▶  $Q(x, y) = 3x^2 + 15xy - 12y^2$

▶  $Q(x, y, z) = x^2 + 7y^2 + 8z^2 - 6xy + 4xz - 10yz$

▶  $Q(x, y, z) = -2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$

(3) Trouver un  $a \in \mathbf{R}$  tel que la forme quadratique binaire  $Q(x, y, z) = x^2 - 2axy - 2xz + y^2 + 4yz + 5z^2$  est définie positive.

(4) Trouver un  $a \in \mathbf{R}$  tel que la forme quadratique binaire  $Q(x, y, z) = ax^2 + 4ay^2 + 4az^2 + 4xy + 2axz + 4yz$  est

▶ définie positive, et

▶ définie négative.

(5) Trouver les points critiques et discuter leur nature pour  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  :

▶  $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$

▶  $f(x, y) = 4y^3 - 12xy + 3y^2$

▶  $f(x, y) = e^{y-x}(y^2 - 2x^2)$

▶  $f(x, y) = x^3y + x^3 - x^2y$

▶  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2+y^2}}$

▶  $f(x, y) = y^2 - \cos(x)$

▶  $f(x, y) = x^3y^2$

▶  $f(x, y) = e^x \sin(y)$

(6) Calculer les intégrales suivantes :

▶  $\int_{-1}^3 -1 + |x - 2| dx$

▶  $\int \frac{x}{2} \cos(x^2) dx$

▶  $\int \frac{2e^x}{3 + e^x} dx$

▶  $\int \sqrt{3x - 2} dx$

▶  $\int_0^1 \frac{1}{2 + 4x} dx$

▶  $\int_0^2 \left( \frac{1}{2 + 4x} \right)^2 dx$

▶  $\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} dx$

▶  $\int x^2 \ln(x) dx$

▶  $\int x \sin(x) dx$

▶  $\int \cos(\ln(x)) dx$

▶  $\int x\sqrt{1 + 2x} dx$

▶  $\int \frac{2}{9 + 4x^2} dx$

▶  $\int \frac{3}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx$

▶  $\int \frac{1}{3 - 2x^2} dx$

▶  $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$

$$\blacktriangleright \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$$

$$\blacktriangleright \int \frac{9x+32}{x^2+6x+8} dx$$

$$\blacktriangleright \int \frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2} dx$$

$$\blacktriangleright \int \frac{4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

(7) Calculer la somme de Riemann  $R(f, \mathcal{P}_{\max})$  et  $R(f, \mathcal{P}_{\min})$  indiqué pour les fonctions suivantes dans l'intervalle divisé en  $n$  parties égales indiquées :

$$\blacktriangleright f(x) = e^x, [-1, 1], n = 4$$

$$\blacktriangleright f(x) = e^x, [-1, 1], n = 6$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{2}{3^x}, [0, 3], n = 4$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{1}{1+x^2}, [0, 2], n = 4$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{1}{1+x^2}, [-2, 0], n = 4$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{1}{1+x^2}, [-2, 2], n = 4$$

$$\blacktriangleright f(x) = \sqrt{1+x}, [0, 1], n = 4$$

$$\blacktriangleright f(x) = \sqrt{1-x^2}, [0, 1], n = 4$$