SUJETS DU PROJET DE FIN D'ÉTUDES

AYBERK ZEYTİN

Je suis très heureux de discuter des propositions venant de vous. Ce qui suit est une liste de sujets que je propose. On peut discuter vos idées sur les projets et faire quelques alterations.

Mais, j'ai un prérequis: si vous voulez faire votre these sous ma direction sur mathématiques pures, il faut s'inscrire au moins deux cours (préférablement un cours que je offre) de mathématiques pures.

1. Dernier Théorème de Fermat sur Polynômes

Résume. Dernier Théorème de Fermat a cependant attendu plus de trois siècles une preuve publiée et validée, établie par Andrew Wiles en 1994. C'est surtout par les idées qu'il a fallu mettre en oeuvre pour le démontrer, par les outils qui ont été mis en place pour ce faire.

Objectifs. Dans ce projet, le but est de comprendre les corps algébriquement clos et après démontrer le conjecture "abc" pour polynômes avec coefficients dans un corps algébriquement clos. On va déduire que l'équation

$$x(t)^n + y(t)^n = z(t)^n$$

a des solutions si $n \leq 2$.

Références

[1] S. Lang Old and new conjectured Diophantine inequalities *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol.23 No.1, 1990.
[2] S. Lang Algebra *Springer*, GTM 211.

2. Valuations et Fractions continues

Résume. L'interpretation de valuations de $k[[x,y]]$ en termes de l'arbre qui s'appelle "valuative tree" est un nouveau résultat. On a l'intention de réinterpréter cela en utilisant les fractions continues.

Objectifs. Dans ce projet, d'abord le relation entre les valuations de certains corps et les fractions continues sera compris. Calcul de l'action d'inversion (flip) en termes de valutions est le but final.

Références

[1] D.J. Bruce and M. Logue and R. Walker. Monomial valuations, cusp singularities and continued fractions *arXiv*, [math.AG] 1311:6493.
[2] C. Favre and M. Jonsson. The Valuative Tree. *Springer*, LNM 1853.

3. Preuve géométrique du théorème fondamental de l'algèbre

Résume. Le théorème fondamental de l'algèbre indique que tout polynôme non constant avec coefficients complexes, admet au moins une racine. Il ya plusieurs preuves de ce théorème: preuve en utilisant théorème de Liouville, théorème de Rouché, théorème des valeurs intermédiaires. Il y a aussi preuves algèbriques ou bien topologiques. Dans ce projet le but est de donner une preuve géométrique.

Objectifs. Pour prouver géométriquement le théorème fondamental de l'algèbre il faut donner quelques définitions simples en géométrie riemannienne. Precisement, il faut apprendre:

- ▶ métriques riemanniennes,
- ▶ la courbure gaußienne d'un métrique,
- ▶ le théorème de Gauß-Bonnet.

RÉFÉRENCES

[1] J.M. Almira and A. Romero. Yet another application of the Gauss-Bonnet Theorem for the sphere. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 14:341–342, 2007.

[2] J.M. Almira and A. Romero. Some Riemannian geometric proofs of the fundamental theorem of algebra. *Differential Geometry - Dynamical Systems*, 14:1–4, 2012.

[3] S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry I. *Interscience - New York*, 1963.

4. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS QUINTIQUES D'UNE VARIABLE

Résume. Comme le titre l'indique, dans ce projet on considère équations de degré 5 d'une variable. On sait que les solutions d'une telle équation n'est pas exprimable par radicaux. Dans ce projet, on utilisé l'idée de Klein qui emploi le théorie de groupes, en particulier le groupe de symétries de l'icosaèdre pour donner une solution.

Objectifs. On commence avec une discussion du resolution des equations algebriques de degré 3 et 4. On traite quelques méthodes antiques: méthode de Cardan, méthode de Ferrari et finalement fonctions symétriques et méthode de Lagrange. Puis, on traite degré 5 en utilisant la méthode de Klein.

RÉFÉRENCES

[1] F. Klein. Lectures on the Icosahedron and the Solution of the Fifth Degree. *Dover Publications - New York*, 1956.

[2] D. Mumford, C. Series and D. Wright. Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein. *Cambridge University Press*, 2002.

[3] O. Nash. On Klein's Icosahedral Solution of the Quintic. `http://www.maths.tcd.ie/õnash/klein_icosahedron_quintic_fil` 2013.

5. L'ALGORITHME DE CORNACCHIA

Résume. Dans ce projet on considère équations de type $x^2 + dy^2 = m$, où d et m sont entiers. On pose que les variables x et y sont entiers, aussi. En général, etant donné une équation de forme $ax^2 + bxy + cy^2 = m$; où a, b et c sont entiers, il est difficile de trouver une solution x et y dans entiers dans le cas $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Objectifs. Pour comprendre pourquoi c'est le cas il faut commencer avec la théorie générale des formes quadratiques binaires et puis considèrer l'algorithme de Cornacchia.

RÉFÉRENCES

[1] J.M. Basilla. On the solution of $x^2 + dy^2 = m$. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 80 (5):40–41, 2004.

[2] J. Buchmann and U. Vollmer. Binary quadratic forms. *Springer - Berlin*, 2007.

[3] H. Cohen. A course in computational algebraic number theory, *Springer-Verlag - Berlin*, 1993.

[4] J.H. Conway. The sensual (quadratic) form., *Carus Mathematical Monographs, Mathematical Association of America - Washington, DC*, 1997, With the assistance of Francis Y. C. Fung.

[5] G. Cornacchia. Su di un metodo per la risoluzione in numeri interi dell' equazione $\sum_{h=0}^{n} C_h x^{n-h} y^h = P$. *Giornale di Matematiche di Battaglini* , 46:33–90, 1908.

6. INVERSION DANS GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ET APPLICATIONS

Résume. Ce projet décrit l'outil géométrique d'inversion dans un cercle, et démontrera comment il peut être utilisé.

Objectifs. D'aprés apprendre quelques définitions simples, en particulier la définition d'inversion, on va considèrer quelques idées, par exemple l'idée du point à l'infini. Comme les applications on considère le théorème de Ptolemy, le théorème de Miquel, et quelques questions qui peuvent être résolues par inversion.

RÉFÉRENCES

[1] H.S.M. Coxeter. Introduction to Geometry. *John Wiley and Sons, Inc.*, 1961.
[2] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer. Geometry Revisited. *Random House and L.W. Singer Co.*, 1967.
[3] J. Hadamard. Leçons de géométrie élémentaire. *Librairie Armand Colin*, 1901.

7. APOLLONIUS CERCLE EMBALLAGES

Résume. Le but de ce projet est de expliquer géométrie plane élémentaire concernant cercle emballages. On va traiter les proprietés diophantiennes des entiers qui sont courbures d'un cercle dans un Apollonius cercle emballage.

Objectifs. Le plan est de traiter les proprietés arithmétiques d'Apollonius cercle emballages aprés avoir appris quelques définitions simples concernant emballage des cercles.

RÉFÉRENCES

[1] P. Sarnak. Introduction to circle packing: The theory of dicrete analytic functions. *CUP*, 2005.
[2] K. Stephenson. Introduction to circle packing: The theory of dicrete analytic functions. *CUP*, 2005.

8. ALGÈBRES AMASSÉES*

Résume. Les algèbres amassées (cluster algebras), inventées par Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky, sont des algèbres commutatives, dont les générateurs et les relations sont construits de façon récursive. Ces algèbres jouent un rôle important en géométrie et théorie des représentations. Il s'est avéré rapidement que la combinatoire des algèbres amassées intervenait également dans de nombreux autres sujets.

Objectifs. Les objectifs sont:

- apprendre la description et premiers exemples,
- algèbres amassées associées aux carquois,
- algèbres amassées à coefficients

RÉFÉRENCES

[1] B. Keller. Algèbres amassées et applications [d'après Fomin-Zelevinsky,...]. *Séminaire BOURBAKI*, 62ème année, 2009-2010, no 1014, 2009.
[2] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *Journal of the AMS*, 15:497–529, 2002.
[3] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Inventiones Mathematicae*, 154:63–121, 2003.
[4] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Mathematical Journal*, 126:1–52, 2005.
[5] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compositio Mathematica*, 143:112–164, 2007.

9. Courbes hyperelliptiques tropicales*

Résume. Les courbes hyperelliptiques jouent un rôle important dans la théorie des espaces de modules des courbes de genre g. Dans ce projet on étudie le lieu de courbes hyperelliptiques tropicales dans l'espace de modules des courbes tropicales de genre g.

Objectifs. Pour étudier les courbes hyperelliptiques on doit apprendre:

- morphismes harmoniques de graphes métriques,
- diviseurs sur graphes métriques et courbes tropicales,
- graphes métriques hyperelliptiques.

Et après on va étudier lieu de courbes hyperelliptiques tropicales.

Références

[1] M. Chan. Tropical hyperelliptic curves. *J. of Algebraic Combinatorics*, 37:331–359, 2013.

*: c'est un projet difficile!!!

Université Galatasaray