FONKTORSELLİK VE EŞLEME

Robert Phelan Langlands

İstanbul, Galatasaray, 2011

KURAMİN ÜÇ NEV'İ

Otomorf formlara ait önerdğim sanitlar ve Drinfeld'in sonradan meydana koyduğu onlara benzer olan san itlar ortak bir çerçevede konmasi faydalidir. Açık ki on sekiz saatta bu çerçeveyi ayrıntılarla tarif etmek mümkñ değil. Buna rağmen biz gelecek haftalarda misallarla, genel kavramlarla, bazı problemler veya umut verici yöntemler anlatarak kaba bir şekilde ise bile size bu alanı tanitmak isteriz.

Yerel ve küresel cisim. İlk olarak konumuzu iki kisima ayiririz: küresel ve yerel. Ondan sonra küresel cisime göre üç farklı fakat birbirine benzer kuram var. Üç mümkün olan kürüsel cisim verelim.
(i) Cebirsel sayilar cisimleri F. Bunların arasında en önemli çisim rasyonel sayilari çísí m $\mathbb{Q}$. Genel olarak iki şart var. Birincisi açık. $\mathbb{Q} \subset F$. Öyle ise F $\mathbb{Q}$-cismi üzerinde bir vektor uzayı dir. Ikinci şart olarak boyutu sonludur. $\mathbb{Q}$ cisimi bir yana en önemli örnekler kuadratik cisimlerder, $F = \{a + b\sqrt{\alpha}\}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, α bir kesirli (rasyonel) sayının karesi değil. Daha genel olarak $F = \{a + b\sqrt{\alpha} + c\sqrt{\beta} + d\sqrt{\alpha\beta}\}$ veya

$$F = \{a + b\sqrt{\alpha} + c\sqrt{\beta} + d\sqrt{\alpha\beta} + e\sqrt{\gamma} + f\sqrt{\alpha\gamma} + g\sqrt{\beta\gamma} + h\sqrt{\alpha\beta\gamma}\}$$

Bu gibi cisimler eski Yunanlar tarafından incelenmiştir, ve ondan çok asir sonra Gauss'un tarafından Legendre teklif ettiği ve Gauss'un ispatladıgı Kuadratik Karşılıklık Yasası ile konumuzun başlangıcı olmuştur.
(ii) Katsayıları sonlu bir κ_q cisminde olan denklemlerin tanimladığı X eğrinin fonksiyonlarının cismi.
(iii) Katsayıları komplex sayılar olan denklemlerin tanimladığı X eğrinin fonksiyonlarının cismi. Bu cisimlerin arasinda bir projecktif doğru sundaki fonksiyonların cismi en basit örnektir. Cisimin öğeleri

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n}, \quad a_m, b_n \neq 0. \tag{1}$$

şeklinde yazılır. Başka bir örnek elde etmek için X bir eliptik eğri olsun.

$$X = \{x, y \,|\, y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\}.$$

Mesela $(x, y) \mapsto x$ veya $(x, y) \mapsto y$ bu cisimde iki fonksiyondur. Birisi her değer iki defa kabul eder fakat ikisi her değer üçdefa kabul eder.

Bu üç cisim için yer'in kavramı var. Bu kavramı anlatmak üçüncü F cisimleri için en kolaydır. Böyle bir cisim için bir yer v sadece eğrinin bir noktasıx tır. Mesela doğruda bu nokta sonlu bir nokta x olabilir veya sonsuz noktası ∞. İlk olarak sonlu z_0 noktasi olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a'_0 + a'_1(z-z_0) + a'_2 z^2 + \cdots + a'_m(z-z_0)^m}{b'_0 + b'_1(z-z_0) + b'_2(z-z_0)^2 + \cdots + b'_n(z-z_0)^n} \\
&= c_0(z-z_0)^k(1 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots), \quad k = m-n, c_0 = a'_m/b'_n \\
&= c_0(z-z_0)^{k_0} + c_1(z-z_0)^{k_1} + c_2(z-z_0)^{k_2} + \ldots
\end{aligned} \tag{2}
$$

Bu şekilde her fonksiyon f her yerde bir Laurent serisinin açılımının tarafından verilmiştir. Bu açılımda ilk üs k_0 f fonksiyonunun yerdeki değerlendirmesidir. Bu serinin ana kesmi sonlutur. Biz yalnız bu hususiyete sahip olan Laurent serilere kabul ederiz. Bu cins Laurent serilerin cümlesinin bir cisim teşkil ettiğini biz kolayca gösterebiliriz. Mesela f fonksiyonunun tersi

$$
d_0(z-z_0)^l(1 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \ldots) \quad d_0 c_0 = 1, \quad l + k = 0, \quad d_1 + c_1 = 0, \ldots
$$

fonksiyonu dur. Bu cisim v yerine bağlı yerel cisim F_v'dir.

İkinci cins küresel cisimlere bağlı yerel cisimler benzer bir şekilde tanımlanır. Iki cins cisimlerin arasındaki tek bir fark var. Eğrini tanımlayan denklemlerin katsayilar κ cisminde içinde olsun. O zaman bizi ilgilendiren n eğrideki noktalar koordinatları κ'nın bir cebirsel genişleme hasıl eder. f fonksiyonunun $c_0, c_1, c_2, \ldots$ veya $d_0, d_1, \ldots$ katsayıları bu cisimin içinde bulunuyor.

Birinci cins küresel cisimler farklıdır. $F = \mathbb{Q}$ ise, F cisminin yerel cisimleri ya REAL sayilarinin cismi ya da p-adik cisimdir. F'nin yerleri ya sonsuz yer ∞ ya da bir asal sayıdır. p bir asal sayı olsun. Her x rasyonel sayısı

$$
x = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_l p^l, \quad 0 \le a_i < p, \quad k \le l \tag{3}
$$

bir toplam olarak tek bir şekilde yazılabilir. Dikkat edersek, iki biçimleri öyle olan sayı toplayabiliriz. Mesela

$$
\left(\frac{3}{5} + 2 + 2\cdot 5\right) + \left(\frac{1}{5} + 3 + 4 \cdot 5\right) = \frac{4}{5} + 0 + 2\cdot 5 + 1 \cdot 5^2
$$

Devam ederek biz sonsuz serileri ortaya koyarak.

$$
x = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_l p^l + a_{l+1} p^{l+1} \ldots, \quad 0 \le a_i < p \tag{4}
$$

bir p-adik cismi elde edebiliriz. Genel cebirsel sayılar cismi için bu kavramın anlatılmasına ihtiyacımız varsa, İlhan Beyin kavramı genel bir şekilde tanımlayacak.

Şimdi üç kuram meydana koyabiliriz. Her üç kuram için hem daha kolay ama buna rağmen zor olan yerel kuram hem de küresel kuram var. Hem yerel hem de küresel üç kuram için eşleme var. Başlamamızdan evvel kuramlarda bir unsur daha var. Bu bağlantılı küçülebilir grup G. Genel olarak bu seminerde bu grup $GL(n)$ ama zaman zaman $SL(n)$

olabilir. Tabii ki başka olanaklar var, ya ortogonal grup, ya simplektik grup, ya da istisnai grupları, fakat onların önemli olmasına rağmen bu kısa seminerde bu gruplar için zamanımız yok.

$GL(2,\mathbb{R})$ GRUBU

Bununla beraber bir başka gruba bakmak isteyeceğim, yani unitär grup. Küçülebilir gruplar doğrusal cebirsel gruplardır. Yani cebirsel denklemler tarafından tanımlanan $GL(n,F)$ grubunun altgruplarıdır. $GL(n)$ kendisi bir yana, en sade örneği, $\det A = 1$ denklemi tarafından tanımlanan $SL(n)$-grubundur. Cisim F reel sayılar cismi ise, $GL(n,\mathbb{C})$ grubunu bir altgrubu olarak $GL(2n,\mathbb{R}) = GL(2n,F)$ içine koyabiliriz. Mesela $n = 2$ ise,

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, \qquad z_{ij} = x_{ij} + y_{ij}\sqrt{-1}, \tag{5}$$

iki sırasıyla iki sü tunu olan bir komplex matris dört sırasıyla dört sü tunu olan bir reel matrise

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & -y_{11} & -y_{12} \\ x_{21} & x_{22} & -y_{21} & -y_{22} \\ y_{11} & y_{12} & x_{11} & x_{12} \\ y_{21} & y_{22} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

gönderilir. Yani A boyutu 2 olan bir komplex uzayın dönüşümü olduğundan boyutu 4 olan bir reel uzayın dönüşümüdür. $GL(2,\mathbb{C})$ grubunun bir altgrubu olarak unitär grup bir cebirsel grup değil, fakat dönüşümün onu dönüştürtüğün grup cebirsel gruptur. Beşinci denklemin tanımladığı matrix unitär ise,

$$\begin{gathered} x_{11}^2 + y_{11}^2 + x_{21}^2 + y_{21}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 + x_{22}^2 + y_{22}^2 = 1, \\ x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + y_{11}y_{21} + y_{12}y_{22} = -x_{11}y_{21} + y_{11}x_{21} - x_{12}y_{22} + y_{12}x_{22} = 0, \end{gathered} \tag{7'}$$

ve bu denklemin bir sonucu olarak

$$\begin{gathered} x_{11}^2 + y_{11}^2 + x_{12}^2 + y_{12}^2 = x_{21}^2 + y_{21}^2 + x_{22}^2 + y_{22}^2 = 1, \\ x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + y_{11}y_{12} + y_{21}y_{22} = -x_{11}y_{12} + y_{11}x_{12} - x_{21}y_{22} + y_{21}x_{22} = 0 \end{gathered} \tag{7''}$$

Dolayısıyla altı numaralı denklemin unitär grubun meydana getirdiği $GL(4)$'ün altgrupu bir cebirsel gruptur.

Bu grubun kompleks unsurlara bakalım, yani unsurların (7) numaralı denklemlere uyup (6) numaralı şekile sahip olan komplex matrislere. $GL(4)$ içinde grubun bir eşlenik gruba bakalım.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisin tersi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisidir. (6) numaralı matrisin kayıtları komplex sayılardır. $z_{i,j} = x_{i,j} + iy_{i,j}$. (7) numaralı denklemlere göre $w_{i,j} = x_{i,j} - iy_{i,j}$ sayısı $z_{i,j}$'a bağlıdır. Bu denklemlerin sayesinde

$$\text{(8')} \qquad \sum_j z_{ij}w_{jk} = \sum_j (x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk}) - i\sum_j (x_{ij}y_{jk} + x_{kj}y_{ji}) = \delta_{ik}$$

ve

$$\text{(8'')} \qquad \sum_j w_{ij}z_{jk} = \sum_j (x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk}) + i\sum_j (x_{ij}y_{jk} + x_{kj}y_b ji) = \delta_{ik}$$

Dolayısıyla

$$\mathbf{A}A\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & z_{12} & 0 \\ 0 & w_{11} & 0 & w_{12} \\ z_{21} & 0 & z_{22} & 0 \\ 0 & w_{21} & 0 & w_{22} \end{pmatrix}.$$

ve

$$\begin{pmatrix} (z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

matrisinin tersi

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

matrisidir.

Bu hesaplarla ne demek isteriz. $\mathbb{R}$ cismin üzerindeki cebirsel gruplar olarak $GL(2)$ ve $U(2)$ farklıcebirsel gruplarıdır fakat $\mathbb{C}$ cismin üzerinde bu iki grup isomorftur. Fazla olarak $U(2,\mathbb{R})$ tıkıztır ve $\mathbb{R}$ üzerindeki grup olar $GL(2)$ neredeyse-paralanabilir. $GL(2)$ grubu $U(2)$ grubunun neredeyse-paralanabilir şekilitir, denilir. Tuhaf olan ve temsil kuramların başka yerinde karşilamadığımız bir görüngü var. Her küçülebilir grupun onun karşılık olan bir neredeyse-paralanabilir grup var. Her küçülebilir gruba ait temsil kuramı endoskopi kavramının sayesinde bir neredeyse-paralanabilir grubun temsil kuramına bağlıdır. Biz sonradan bu konuldan bahsedeceğiz.

F veya F_v cismine göre üç cins yerel kuram var ve üç cins kürüsel kuram da var. Her cisme bağlı hem bir otomorf kuram hem de bir temsil kuramı arıyoruz. Bu iki kuramın arasındaki bir eşleme de arıyoruz. Örneklere bakarak biz bu ifadeyi daha iyi anlayacağız. Her iki kuramın çerçevesinde biz bir Tannaka kategorisine benzer bir kategori tertip etmek isteriz. Gerçekten biz iki kategori tertip isteriz. Matematikte *kategori* söz'u kesin bir kavram işaret eden bir söz olduğundan kategorinin yerinde *yapı* diyelim. Genel olarak biz tanımlamadığımız Tannaka kategoriya benzer yapı sadece T-yapisi deriz.

Bu cins kategori verilmiş karakteristiği 0 olan bir Φ cismine aittir. Bazen bu cisim kesirli sayılar cismidir fakat bizim için genel olarak kompleks sayılar cismidir. En basit ve en asli örnek olarak, biz bir grubun sonlu boyutlu Φ üzerindeki temsiliydir. Bizim incelediği T yapıları için bu grup bir cebirsel grup olabilir. Φ kompleks sayılar çismi olsun.

İlk ince çok sade, fazla sade bile, bir örnek vermek isterim. Yerel cisim $F = \mathbb{R}$. G grubu $GL(1)$ olsun. $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\times}$. Bu grubun indirgenemez unitär temsilleri basittir,

$$x \mapsto \operatorname{sgn} x^m |x|^{is}, \qquad m = 0, 1, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Ben şimdi bir kaç şimdiki basit çerçevede budala görülen tanımlar ve kavramlar ortaya koymak isterim. Bu karakterler $GL(1, \mathbb{R})$ grubunun birboyutlu teslimleriydir. Bu teslimleri birbiriyle çarpabiliriz. Bir boyutlu teslimleri toplayarak biz grubun birden fazla boyutlu olan temsillerini elde ederiz. Onların tertip ettiği kategori bir kategoridir. Niyetimiz için biz $GL(1)$ grubunun L-grubunu meydana çıkarız. Bu işaret ${}^L G$ olan L-grup ya $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}$, ya da $\mathbb{C}^{\times} \times \operatorname{Gal}(\mathbb{C}/R)$ olabilir. Şu anda onun ikinici şekiline dikkate almamız gerek değil.

Herhalde abes boş bir ifade olarak, bir eşleme var. Bir yanda: $\mathbb{R}$ üzerindeki cebirsel grubunun $GL(1)$ reel noktaları olan $GL(1,)$ grupunun unitär temsilleri. Diğer yanda: $\mathbb{R}^{\times}$ grupundan ${}^L G$ grupunun azami tıkız altgruna omomorfizmlar. Bu altgrup mutlak değeri 1 olan kompleks sayılardır.

Bazı Weil grubu diyen bazı Weil-Şefareviç grubu diyen kullanarak, Biz bu omomorfizmları diğer bir şekilde tarih edebiliriz. Bu işareti $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ olan Weil grubu $\mathbb{C}$ grubunun büyütmesidir.

$$\{1\} \to \mathbb{C}^{\times} \to W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \to \operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \to \{1\}.$$

$\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \sigma\}$ ise, σ bir $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ içinde ve karesi negatif olan $\tilde{\sigma}$ unsurunun imgesidur. Üstelik $z \in \mathbb{C}^{\times}$ ise $\sigma z = \bar{z}\sigma$.

Bu grup abelyan değil. Önemli bir örten omomorfizm $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\times}$ var.

$$z \in \mathbb{C}^{\times} \mapsto z\bar{z}, \quad \tilde{\sigma} \mapsto \tilde{\sigma}^2.$$

Açık ki bu omomorfizm örtentir. Dolayısıyla (9) numaralı her omomorfizm bir unitär ve boyutu bir olan $W_{\mathbb{Z}/\mathbb{R}}$ grubun temsilini verir. Başka boyutu bir olan $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ unitär temsilleri yok.

F cismi $\mathbb{R}$ ise, bizim anlatacağım yerel fonktorsellik ve eşleme için bu Weil grubu önemlidir. Diğer bir $\mathbb{R}$ üzerindeki cebirsel gruba bakalım.

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Açık ki $G(\mathbb{R})$ grubu $\mathbb{C}^{\times}$ grubuna isomorftur.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a + b\sqrt{-1}.$$

$G(\mathbb{R})$ grubunun boyutu bir olan unitär temsilleri basit bir şekilde verilir.

$$z = a + b\sqrt{-1} \mapsto |z|^{is}(z/|z|)^m, \qquad s \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

G cebirsel grubunun L-grup nedir. Cebirsel grup olarak G grubun boyutu 2 dir. ${}^LG$ de iki boyutludur.

$$^LG = GL(1,\mathbb{C}) \times GL(1,\mathbb{C}) \ltimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}).$$

$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1,\sigma\}$ grubun $GL(1,\mathbb{C}) \times GL(1,\mathbb{C})$ grubune etkisi basittir,

$$\sigma : (z,w) \to (w,z).$$

${}^LG$ grubun azami tıkız altgrubu $\{z \times w \ltimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \,|\, |z| = |w| = 1\}$ grubudur. Biz

$$\begin{tikzcd}
W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & {}^LG \arrow[dl] \\
& \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

diyagrami değişmeli kılanan omomorfizmlere bakarız. Açık ki iki koşul var.

$$\phi : \begin{cases} z \to \phi_1(z) \times \phi_2(z) \times 1; \\ \tilde{\sigma} \to a \times b \times \sigma \end{cases}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} \phi_2(z) &= \phi_1(\bar{z}), \\ ab &= \phi_1(\tilde{\sigma}^2). \end{aligned}$$

ϕ omomorfizminin imgesi ${}^LG$ grubun azami tıkız altgrubunda bulunur ise, $|\phi_1(z)| = |\phi_2(z) = 1$. Herhalde koşullara göre herhangi bir ϕ ϕ_1 tarfından belirtilmiştir. ϕ_1 omomorfizmin image tıkız ise ϕ omomorfizminin imgesi tıkız olur. Aksine de doğru.

Bu halleri basittir. Şimdi ondan çok daha zor bir gruba bakalım, yani $G = GL(2)$ gruba. F cismi gene $\mathbb{R}$ cismidir. ${}^LG$ ya $GL(2,\mathbb{C})$ ya da $GL(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ olabilir. (10) numaralı diyagram için iki grubun arasındaki fark yok. Bizim için birinci şekil daha uygundur çünkü o zaman ϕ omomorfizmi sadece $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ grubunun bir iki boyutlu unitär temsilidir. Bu temsil ya indirgenir olur ya da indirgenemez. Birinci halde olsa, bildiğimiz gibi ϕ öyle yazılabilir.

$$\phi(w) \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_1(z\bar{z}) & 0 \\ 0 & \mu_2(z\bar{z}) \end{pmatrix}, & w = z, \\ \begin{pmatrix} \mu_1(\tilde{\sigma}^2) & 0 \\ 0 & \mu_2(\sigma^2) \end{pmatrix}, & w = \tilde{\sigma}. \end{cases} \tag{11}$$

Bu denklemlerde μ_i, $i = 1,2$ karakterler $\mathbb{R}^\times$ grubunun herhangi karakterler tir.

Genel olarak, ϕ omomorfizma gruba $\mathbb{C}^\times$ sınırlayabiliriz. Meydana çıkan temsil iki karakterler toplamıdır. Bu karakterler ya farklı ya da eşit olabilir. Farklı ise, χ_1 ile χ_2 olsun. Açık ki her z için $\chi_1(\bar{z}) = \chi_1(z)$ veya her z için $\chi_1(\bar{z}) = \chi_2(z)$. İlk halde $z\bar{z}$ 1'e eşit olan

z için $\chi_i(z) = 1$, $i = 1, 2$ ve öyle bir μ_i var ki $\chi_i(z) = \mu_i(z\bar{z})$. Dolayısıyla bu hal için (11) numaralı denklemler doğrudur.

Fakat en azında bir z için $\chi_1(\bar{z}) \neq \chi_2(\bar{z})$ ise, o zaman ϕ indirgenemez bir temsildir, ve şekli farklıdır. Yani

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \begin{pmatrix} \chi(z) & 0 \\ 0 & \chi(\bar{z}) \end{pmatrix}, \quad \chi = \chi_1, \\ \phi(\sigma) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi(\tilde{\sigma}^2) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

χ karakterinin şekli tanınmış,

$$\chi(z) = |z|^{is} \frac{z^m}{|z|^m}, \quad s \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}.$$

Bu fikirlerin sonucu olarak, $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ grubun iki şekillerin farklı olan iki nevi temsilleri var. Bir tarafa bıraktığımız iki karakter χ_1 ile χ_2 birbirine eşit olan temsiller her iki neviye aittir. $\chi_1(z) = \chi_2(z) = \mu(z\bar{z})$ olsun.

$$\phi(w) \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \mu(z\bar{z}) & 0 \\ 0 & \mu(z\bar{z}) \end{pmatrix}, & w = z, \\ \begin{pmatrix} \sqrt{\mu(\tilde{\sigma}^2)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\mu(\tilde{\sigma}^2)} \end{pmatrix} & w = \tilde{\sigma} \end{cases} \tag{13}$$

Bu ikiye bölme $GL(2, \mathbb{R})$ grubunun temsilleri sınıflama için çok önemlidir. Bu grup ile temsillerinin hakkında bazı temel izah edeyim. Ilk olarak bu grubun bir topolojik grup olarak, biz yalnız sürekli temsilleri kabul ederiz. Fazla olarak ilgilendiğimiz temsiller unitär olacak. Bir boyutlu $g \mapsto 1$ temsil bir yana biz yalnız sonsuz boyutlu temsilleri inceleyeceğiz. $GL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir tıkız altgrubu var, yani $O(2)$ grubu. Bu grubun bir azami tıkız altgrubu olarak

$$K = \left\{ k = k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \mp\sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \right\} \tag{14}$$

grubunu kullanacağız. V bir topolojik vektor uzay olsun ve $g \mapsto \pi(g)$ göndermesi $GL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir V üstündeki sürekli unitär teslimi olsun. Biz bazı şartlar koyarız. Birisi Harish-Chandra “kabule şayan” olmasi şartıydır. Yani, $v \in V$ ise, $\{\pi(k)v\, k \in K\}$ cümlesinin meydana getirdiği altuzay sonlu boyutludur. Bundan fazla π indirgenemez olsun. Sonunda ilk sınıflama için π kıvamlı (tempered) olmasını farzederiz. Bu kavram Schwartz’ın dağılım (distribution) kurami ndan alınmış bir kavramdır. Bu kavram küçülebilir gruplar üstündeki Fourier dönüşümü teorisi için çok önemli. O da Harish-Chandra tarafından meydana konmuştu.

Anlattığımız kuram için dikkate değer ve temel bir teorem var. $GL(2, \mathbb{R})$ grubunun anlatığımız şartlara göre indirgenemez kıvamlı π temsilleri ile $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ Weil grubundan $GL(2, \mathbb{R})$

grubunun L-grubu olan $GL(2,\mathbb{C})$ grubuna omomorfizmlar ϕ arasında bir eşleme var. Bu eşleme anlatmak için Dedekind ile Frobenius'un meydana koyduğu grup karakteri kavramını hatırlıyoruz.

Sonlu grup için bir karakter ne olduğu hatırlayalım. Ilk önce bir grup için bir karakter eşlenme değişmez bir fonksiyondir. Biz grubun bir π temsiliyle başlayıp ve onun izini kullanarak

$$g \mapsto \operatorname{tr}\pi(g) = \sum_i \pi_{i,i}(g), \qquad \pi(g) = (\pi_{i,j}(g)),$$

bir karakter elde ederiz. Özellikle bu karakterler grubun indirgenemez π temsilleri küçülebilir için önemlidirler. Fakat bu iki matematikçi bir eşlenme değişmez olan bir fonksiyon başlayarak grubun temsillerinin kavramınımeydana koymuştu. Ben başka yerde fikirlerini anlatacağım. Harish-Chandra geliştirdiği sonsuz boyutlu temsiller kuramı ve ona ait analiz, karakterin kavramı daha zordır. Buna rağmen her kabul edilen indirgenemez temsilin π bir izi var. Ilk olarak, grupta bir Haar ölçüm dg var. $GL(2,\mathbb{R})$ bir Lie gruptur. Öyle bir grupta biz desteği sınırlı ve sonsuz türevlenebilir bir fonksiyonu için

$$\int f(g)\pi(g)dg = \pi(f)$$

operatörüü meydana koyabiliriz. π temsili ünitar ise işlediği V uzay bir Hilbert uzayıdır. $\{v_j \,|\, (v_i, v_j) = d_{i,j}\}$ cümlesi onun bir tabanı ise,

$$\operatorname{tr}\pi(f) = \sum_i (\pi(f)v_i, v_i)$$

yakınsak bir toplamdır. Kuramda iki önemli teorem var. $G = GL(2)$ veya genel olarak G $\mathbb{R}$ cisim "ustünde herhangi birküçülebilir grup ise

1. Teorem.

$$f \mapsto \operatorname{tr}(\pi(f))$$

Schwartz'ın anlamında bir dağılımdır.

Bu dağılım χ_π olsun. Ikinci teorem daha yüksek bir düzeydir.

2. Teorem. χ_π *dağılımı bir fonksiyondir.*

$$\operatorname{tr}(\pi(f)) = \chi_\pi(f) = \int_{G(\mathbb{R})} f(g)\chi_\pi(g)f(g)dg.$$

Tabii ki anlattığım teoremleri herhangi bir küçülebilir grup için geçerlidir. Ama biz sadece $GL(2)$ inceleyersek daha kolay olur. χ_π fonksiyon eşleme değişmezdir, yani

$$\chi(hgh^{-1}) = \chi(g).$$

$g \in G(\mathbb{R})$ ise, özdeğerleri λ_1 ve λ_2 olsun. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ halinde g düzgündür. Yoksa tekildir. g noktası düzgün nokta ise, g noktasının civarinda χ_π sonsuz türevlenebilirdir. χ_π fonksiyonun eşleme değişmez olduğundan,

$$\chi_\pi(g) = \chi_\pi(\lambda_1, \lambda_2) = \chi_\pi(\lambda_2, \lambda_1) = \chi_\pi(a, b), \qquad a = \lambda_1\lambda_2, \quad b = \lambda_1 + \lambda_2.$$

$GL(2)$ gruba bakmağa devam etmemden evvel, genel bir teorem kisaca anlatarsak faydalı olur. Aradığımız yerel fonktorselik ile eşleme bize ne verebiliriz, en azında aritmetik yerel cisim için? Biz şu ana kadar gerçekten az biliriz. Cisim $\mathbb{R}$ cismi veya $\mathbb{C}$ cismi ise, biz Harish-Chandra sayesinde oldukça çok biliriz, fakat her istediğimiz şey değil! Arkimedyan olmayan cisimler için çok az biliriz. İlhan Bey anlatacak. $\mathbb{C}$ cismin $\mathbb{R}$ cisminden daha kolay olmasına rağmen, ben $\mathbb{R}$ üstündeki grupları anlatacağım. Her halde biz evvelce her $\mathbb{C}$ üstündeki grupun bir $\mathbb{R}$ üstündeki grubun tarafından verilebilmesini basit örnekle anlattık. Ben ilk önce iki basit gruplara baktım, $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$ ve $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$. Şimdi konumuz daha zor olan $GL(2, \mathbb{R})$ olur.

Yerel fonktorsellik en azında iki seviyede görünür. Ilk olarak kıvamlı teslimler için. Ondan sonra daha genel Arthur'un meydana koyduğu bir neviye bakacağız. F_v yerel aritmetik cisim olsun, yani (i) veya (ii) numaralı hale göre bir yerel cisim. İlhan Bey anlattığı veya anlatacağına göre bir Weil grubunun fasilesi var,

$$\{W_{K_v/F_v} \mid [K_v : F_v] < \infty, \, K_v/F_v \text{ Galois}\}.$$

Ben yalnız $F_v = \mathbb{C}$ hali bir tarafa en sade hale bakacağım, yani $F_v = \mathbb{R}$. Ifade edeceğim varsayım ispatlanmamış. Tabii ki $K_v \subset L_v$ ise, o zaman her $\mathrm{Gal}(K_v/F_v) \to {}^LG$ omomorfizmi bir $\mathrm{Gal}(L_v/F_v) \to {}^LG$ omomorfizmi belirliyor. Dolayısıyla her omomorfizm bir

$$\{\mathrm{Gal}(L_v/F_v) \to {}^LG\} \tag{15}$$

fasilesi belirliyor. Önemli bir varsayıma göre her F_v için bu fasile $G(F_v)$ grubunun tek bir indirgenemez kıvamlı teslimi belirliyor. Başka niyetlerinin arasında bir küçülebilir grup $G(F_v)$ için bu varsayımın ispatlanması yerel fonktorselliğin ana yerel maksattır. Şu ana kadar bu varsayım adeta her yerel cisim ve her grup için bilinmez. Tabii ki küresel maksatları yerel maksatlardan çok daha önemli ve çok daha zordur. Sınıf cisim kuramında gibi küresel teori yerel teoriyle bağlıdır! Sınıf cisim kuramına karşı genel grup için aradığımız kuramının henüz geliştirmesi. Olabilir ki Ali Bey konuşmalarında yerel ile küresel kuramların arasındaki bağlılarına dokunacak.

Daha doğru genel olarak ve Dedekind-Frobenius meydana koyduğu kavramlara göre, biz indirgenemez temsilleri tek tek almalıyız. Fakat teklif ettiğimiz teori öyle ki her (15) numaralı fasileye tek bir temsil tayin edilmez, bir L paketi tayin edilir. Kısaca anlatabilirim. Göreceğiz gibi, $GL(2, \mathbb{R})$ grubu için, her $n \geq 1$ sayısına indirgenemez temsillerin kesik serisinin bir π öğesi tayin ederim. Biz π teslimini $SL(2, \mathbb{R})$ grubuna sınırlasak, bu temsil iki indirgenemez temsile indirebiliriz, olomorf bir temsile ile zıt olomorf bir temsile. Nedeni sezgisel bakımda açıktır. $SL(2, \mathbb{R})$ içinde fazla eşlenik sınıfları var. Aslında $SL(2, \mathbb{R})$ içinde

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \mp\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

iki matrisi eşlenik değil. Fakat $GL(2,\mathbb{R})$ içinde eşleniktir. $SL(2,\mathbb{R})$ grubu $GL(2,\mathbb{R})$'dan daha küçük olmasına rağmen bir bakımda fazla eşlenik sınıfları var. Indirgenemez temsillerin karakterlerinin eşlenik sınıflartaki fonksiyonların bir tabanı teşkil ettiğinden dolayı $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun daha fazla karakterleri var! Biz aber şu anda $GL(2,\mathbb{R})$ grubunu inceliyoruz.

$GL(2,\mathbb{R})$ GRUBUNUN KARAKTERLERİ

Tabii ki karakterleri ele geçirmek için biz ilk olarak uygun teslimleri ele geçirmeliyiz. Fakat kuramı yalnız yüzeysel bir şekilde tarif ettiğimden ben kesik serinin zor olan inşaatını bir tarafa bırakarak serinin karakterini verip onun niteliklerinin önemini beirteceğim.

Kıvamlı temsillerinin iki serisi var, sürekli seri ile kesik seri. Birincisini biz basit ve apaçık bir şekilde inşa edebiliriz. (11) numaralı şekilde gibi, $\mathbb{R}^\times$ grubunun iki unitär karakteri μ_i, $i = 1, 2$ verilmiş olsun. $\mu_i(a) = \operatorname{sgn}(a)|a|^{is}$, $s \in \mathbb{R}$. Biz $GL(2,\mathbb{R})$ üstündeki aşağıdaki şartlar konmuş olan h fonksiyonları meydana koyuruz:
(i)

$$n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ise, $h(ng) = h(n)$.
(ii)

$$t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ise,

$$h(tg) = (|a|/|b|)^{1/2}\mu_1(a)\mu_2(b)h(g) = t^\rho \mu(t)h(g), \qquad t^\rho = \frac{|a|^{1/2}}{|b|^{1/2}}, \quad \mu(t) = \mu_1(a)\mu_2(b).$$

(iii) $GL(2,\mathbb{R})$ azami tıkız altgrubu olarak (13) numaralı formül matrisleri alırız. Fonksiyon h için

$$\{g \mapsto h(gk(\theta))\}$$

fonksiyonlarının teşkil ettiği cümlenin sonlu boyutlu bir vektor uzayda bulunmasını talep ederiz.

Bu fonksiyonlar bir tamam olmayan $\mathfrak{H}$ Hilbert uzayını teşkil eder. Dahili çarpım

$$\int_K h_1(k)\bar{h}_2(k)dk$$

integrali verilmiştir. Bu uzayın üstündeki $GL(2,\mathbb{R})$ grubunun $h \mapsto h' = \pi_{\mu_1,\mu_2}\pi(g_1)h$, $g_1 \in GL(2,\mathbb{R})$ bir teslimi var.

$$h'(g) = h(gg_1).$$

Bu $\pi = \pi_{\mu_1,\mu_2}$ temsile ana seri'nin bir temsili denilir. Iki karakter μ ile μ_2 unitär ise, yani her t için $|\mu_i(t)| = 1$, o zaman π teslimi de umitärdir.

Verdiğimiz her formülün doğru olmasını doğrulamak için teslimin gerçekten unitär olmasını gösterelim. h_1 ile h_2 fonksiyonları verilmişise, biz $GL(2,\mathbb{R})$'da öyle bir $\tilde{h}_1$ fonksiyonunu bulabiliriz ki

$$h_1(g) = \int t^\rho \mu(t^{-1}) \tilde{h}_1(tng) dtdn. \tag{16}$$

Bu denklemi doğrularken

$$\frac{d(t^{-1}nt)}{dn} = t^{-2\rho}$$

olduğunu dikkate alın.

(16) numaralı denklemini ve $dg = dtdndk$ ile $\mu(t^{-1}) = \bar{\mu}(t)$ denklemlerini kullanarak, biz

$$\begin{aligned}(h_1, h_2) &= \int t^\rho \mu(t^{-1}) \tilde{h}_1(tnk) \bar{h}_2(k) dtdndk \\ &= \int \tilde{h}_1(tnk) \bar{h}_2(tnk) dtdndk\end{aligned} \tag{17}$$

denklemini ele ederiz. Yanlışlık yoksa bu denklemin sayesinde

$$(\pi(g)h_1, \pi(g)h_2) = (h_1, h_2)$$

eşitliği açıktır.

$\pi = \pi_\mu$ tesliminin karakterini kolayca hesaplanabilir. Biz anlattığı kuramın hem genel ilkeleri hem de çok ayrıntılar için Anthony Knapp yazdığı *Representation Theory of Semisimple Groups* kitabın a müracaat edebilirsiniz. Hesabın neticesini vermemden evvel, genel olarak karakterlerin nasıl verilmesini anlatmak isterim. Ben yalnız $GL(2,\mathbb{R})$ grubuna bakacağım fakat vereceğim tarif genel olarak her $\mathbb{R}$ üstündeki küçülebilir grup için geçerlidir.

$GL(2,\mathbb{R})$ içerdiği g öğesinin $\{g\}$ eşlenik sınıfı λ_1, λ_2 özdeğerlerinin tarafından tam belirlenmiş değil. $a = \det g$ ve $b = \operatorname{tr} g$ ise, λ_1 ve λ_2,

$$x^2 - bx + a = 0$$

denkleminin köküdür. $b^2 - 4a \neq 0$ ise, yani g matrisi düzgün ve yarı basit ise, eşlenik sınıfı $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ çiftinin tarafından belirlenir.

$$\{g \in GL(2,\mathbb{R}) \,|\, b^2 - 4a = 0\}$$

cümlesinin kütlesinin 0 olduğu ve anlattığımız ikinci teoreme göre her χ_π karakterinin bir eşleme değişmez bir fonksiyonu olduğundan, bu fonksiyonu tamamen belirlemek için $b^2 - 4a \neq 0$ cümlesinde kabul ettiği değerleri belirlemeliyiz. (a, b) düzlemindeki bir fonksiyon olur. $b^2 - 4a = 0$ parabolunun dışında düzgün bir fonksiyon olduğunu Harish-Chandra tarafından ispatlanmış.

Bu teorem nasıl ispatlandığı kısaca anlatalım. $GL(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ Lie cebri var. Bundan fazla $\mathfrak{g}$'nin Lie cebrinin evrensel sarma cebri de var (universal enveloping algebra). Simgesi $\mathfrak{A}$ olsun. $X \in g$ ise $\pi(X)$ sınır lı olmayan bir işlemci olarak tanımlanır. $X_i \in \mathfrak{g}$, $i = 1, \ldots, n$ iseler

$$\pi(X_1 \ldots X_n) = \pi(X_1) \ldots \pi(X_n)$$

de sınırlı olmayan bir işlemci olarak tanımlanır.

$$X_{kl} = (\delta_{ik} \delta jl)$$

olsun. $\mathfrak{A}$ cebrinin merkezi (center) hasıl eden iki öğesi Z_1, Z_2 var. Knapp'un kitabındaki işaretle

$$\begin{aligned} h &= X_{11} - X_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e &= X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ f &= x_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

olsun.

$$Z_1 = X_{11} + X_{22}, \qquad Z_2 = \Omega = \frac{1}{2} h^2 + ef + fe.$$

Knapp için ana örnek $SL(2,\mathbb{R})$ dir. Benim için ana örnek $GL(2,\mathbb{R})$ grubudur. Ben L grubunun önemini vurgulamak isterim ve $G = SL(2,\mathbb{R})$ ise, ${}^LG = PGL(2,\mathbb{C})$. Projektif grubu kullanmak uygunsuz.

Her indirgenemez kabule şayan π teslimi için $\pi(Z_i)$, $i = 1, 2$ bir skalardır.

$$\pi(Z_i)v = \alpha_i v, \qquad v \in \mathfrak{H}.$$

α_1 sayısı çok ilginçdeğil.

$$\pi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}) = \operatorname{sgn}^m(a)|a|^{is}, \qquad m = 0, 1, \quad s \in \mathbb{R}.$$

ise

(18) $$\pi(Z_1)(v) = isv, \quad \alpha_1 = is.$$

Üstelik

$$\chi_\pi(ag) = \operatorname{sgn}^m(a)|a|^{is}.$$

Tanımına göre, desteği sınırlı ve sonsuz türevlenebilir bir f fonksiyon için

$$(\chi_\pi, f) = \operatorname{tr} \pi(f), \qquad (\chi_\pi, Z_2 f) = \operatorname{tr}(\pi(Z_2 f)) = \operatorname{tr}(\pi(Z_2)\pi(f)) = \alpha_2 \operatorname{tr}(\pi(f))$$

Z_2 diferansiyel operatörü n muavin adjoint operatörü Z_2'dir. Dolayısıyla

$$\alpha_2(\chi_\pi, f) = (\chi_\pi, Z_2 f) = (Z_2\chi_\pi, f)$$

ve ele geçirdiğimiz denklem

$$Z_2\chi_\pi = \alpha_2\chi_\pi. \tag{19}$$

(19) numaralı denklem $GL(2, \mathbb{R})$ uzayında geçerli bir denklemdir. Fakat χ_π iki değişkeni olan bir fonksiyondur, yani a ile b değişkenleri. Biz iki boyutlu diferansiyel denklem olarak (19) numarılı denklemi yorumlayacağız. Biz Harish-Chandra'nın meydana koyup kullandığı ve Knapp'ın kitabında anlatılan bir isomorfizm uygularız.

Bu dersde Harish-Chandra'nın her küçülebilir grup için geçerli olan izomorfizmini ispatlamak istemem fakat somut bir problemde nasıl kullanmasını kısaca anlatmak isterim. Bu birkaç ders anlatıldığı seminerde ne arkimedyan ne de arkimedyan olmayan şeklinde abelyan olmayan harmonik analizi sunamayız. Harish-Chandra'nın muhteşem arkimedyan kuramının bir örnek olarak ben $GL(2, \mathbb{R})$ grubuna ait birkaç formül sunmek isterim. Bu tek örnek için bile, ben az anlatabilirim. Şimdiki durum öyle.

(i) Her küçülebilir grup için $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ yerel cisimleri üstündeki kuramı çok geliştirilmiştir, fakat önemli problemler kalır, özellikle kıvamlı olmayan temsiller için.

(ii) Arkimedyan olmayan yerel cisimler ve adeta her küçülebilir grup için önemli problemler kalır. Mümkün ki biz Ngô'nun yeni araştırması sayesinde şimdi bu problemleri başarılı ele alabiliriz. Fakat bunun için geometriden, topolojiden, cebirden, analizden gerek aletlere ihtiyaç var.

Bu alanlarda araştiracak çok problem var. Açık ki biz onlara ancak dokunabiliriz.

Şimdi Harish-Chandra isomorfizmine döneriz. Değiskenleri olarak χ_π fonksiyonunde $g \in GL(2, \mathbb{R})$ değil onun özdeğer $t_1 = \lambda_1$, $t_2 = \lambda_2$ alabiliriz veya $b = t_1 + t_2$, $a = t_1 t_2$. Biz (18) ile (19) numaralı diferansiyel denklemleri bu yeni değiskenlerle yazmak isteriz. Birincisi kolaydır, yani

$$\sum_1^2 t_i \frac{\partial\chi_\pi}{\partial t_i} = is\chi_\pi. \tag{18$'$}$$

Bu sadece χ_π fonksiyonun bir ebadı aynı olan (homogeneity — Redhouse sözlügündan almiş) niteliği.

(a, b) düzlem $b^2 - 4a \neq 0$ koşulun tarafından tanımlamış bölgenin üç kismi var: (i) $b > 0$ ve $b^2 - 4a > 0$, yani t_1 ile t_2 reel artı sayılardır; (ii) $b < 0$ ve $b^2 - 4a > 0$, yani t_1 ile t_2 reel eksi sayılardır; (iii) $b^2 - 4a < 0$, $t_2 = \bar{t}_1$ ve t_1, t_2 kompleks sayılardır. Bizim için $a \neq 0$. Dolayısıyla a'nın işarete göre her üç kismin iki alt kismi olabilir. Fakat $b^2 - 4a < 0$ ise, $a > 0$ ve parabolun içerisindeki üçüncü kisim bölünmemiş. Her düzgün ve yarı basit eşlenik sınıfta ya bir kösegen öğesi var,

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}^\times,$$

ya da bir

$$\alpha\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\qquad \alpha>0,\quad \alpha^2=a.$$

şeklinde olan bir matris içerir. İkinci halde $t_1 = ae^{i\theta}$, $t_2 = ae^{-i\theta}$.

$$D(g)=\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\left(1-\frac{t_2}{t_1}\right)=\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}-\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}\neq 0.$$

Maalesef bu fonksiyonun değeri yegane bir şekilde belirtilmiş değil, fakat $|D(g)|$ belirtilir. χ_π fonksiyonun yerinde

$$\tau_\pi(t_1,t_2)=|D(g)|\chi_\pi(g)$$

fonksiyonunu inceleyim. Tam güvenle veremediğim Harish-Chandra isomorfizmine göre $(18')$ numaralı denklem değişmez.

$$(18'')\qquad \sum_1^2 t_i\frac{\partial\tau_\pi}{\partial t_i}=is\tau_\pi.$$

Buna karşit ikinci denklem daha basit olur

$$(19)\qquad \sum_{i=1}^2\frac{\partial^2\tau_\pi}{\partial t_i^2}=\alpha\tau_\pi.$$

Unuttuğum fakat Knapp'un kitabında bulunan c sabitiyle ikinci özdeğer $\alpha = c\alpha_2$.

$GL(2,\mathbb{R})\supset\mathbb{R}^\times\cdot SL(2,\mathbb{R})$ ve $[GL(2,\mathbb{R}):\mathbb{R}^\times\cdot SL(2,\mathbb{R})]=2$. Harish-Chandra omomorfizmi abelyan olmayan $SL(2,\mathbb{R})$ yarı basit altgrubu için gerektir ve önemli fakat abelyan altgrubu $\mathbb{R}^\times$ gerek değil. Bu sebepten $(18'')$ numaralı denklem değişmiyor.

Bu iki denklem kolayca çözebiliriz. Fonksiyon τ için her parabolun dışarısında bulunan bağlantılı bölgede β_+,β_- katsayıları farklı olarak basit bir formül var,

$$(20)\qquad \tau_\pi(t_1,t_2)=\beta_+|t_1|^{is_1}|t_2|^{is_2}+\beta_-|t_2|^{is_1}|t_1|^{is_2}.$$

Olabilir ki bu denklemde üstler saf sanal sayılar değil. Parabolun içerisinde benzer bir formül var

$$(21)\qquad \tau_\pi(t_1,t_2)=\beta_+t_1^{is_1}t_2^{is_2}+\beta_-t_2^{is_1}t_1^{is_2}$$

fakat $t_1=\alpha\exp(i\theta)$, $t_2=\alpha\exp(-i\theta)$, $\alpha>0$. By yüzden $m=(is_1-is_2)/2\in\mathbb{Z}$ ve biz formülü

$$(22)\qquad \tau_\pi(t_1,t_2)=\beta_+\alpha^{is_1+is_2}\exp(im\theta)+\beta_-\alpha^{is_1+is_2}\exp(-im\theta)$$

olarak yazmalıyız. Biz verilmiş $\pi=\pi_\mu$ temsiliyle başladık, fakat (20) ili (21) numaralı denklemler tam geneldir. Alışılmış terminolojiye göre parabolun dışarısında bölgede özdeğerleri t_1 ile t_2 olan matris hiperbolik ve parabolun içinde olan matris eliptiktir

(20) ile (21) numaralı denklemler iki katsayılar tam belirli değil. Yani bir matrisin iki özdeğerin arasında hangisi t_1 hangisi $t_2$dir. $\beta_+ = \beta_-$ ise önemli değil fakat genel olarak önemli. Örnek olarak t_1 ile t_2 reel ise biz $|t_1| \geq |t_2|$ icap edebiliriz veya $|t_1| = |t_2|$ ise, $2\pi > \arg(t_1) > \arg(t_2) \geq 0$ icap edebiliriz.

Benim bir maksatım var. Bu maksatı henüz anlamadım. Birinci nevi yerel cisim ve belki de ondan çok farklı olmayan ikinci nevi yerel cisim de için ve her küçülebilir grup için biz tam olan bir temsiller kuramını kurmak isteriz. Ilk olarak Harish-Chandra $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{C}$ çok bakımda tamdır. Hele iyi tanımının elde edilmesine rağmen tanımlamadıgımız kıvamlı temsiller için onun kuramı çok güzel ve her bakımda çok kuvvetlidir. Otomorf temsiller için bu teori çok önemli ama yetmez. Buna rağmen otomorf temsillerin alanında çalışmak isterseniz her şey önce onun teorisini kavramak gerektir.

Somut bir şekilde verilmiş olan $\pi = \pi_{s_1,s_2}$ temsili ana seride bulunursa, onun karakter hesaplamak kolaydır. Yani hem $\pi(g)$ hem de

$$\int_{G(\mathbb{R})} f(g)\pi(g)dg \tag{23}$$

bir fonksiyon uzayının üstünde bir tümleme (integral) işlemcidir. Fonksiyonlar tıkız cümlenin üstundedir Bu uzayın içrdiği fonksiyonlar

$$f(tk) = \mu(t)f(k), \qquad t = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

koşulla belirtilen fonksiyonlardır. Dolayısıyla $\pi(f)$ işlemcinin çekerdiği iki değişken olan bir fonksiyon $F(k_1, k_2)$, $k_1, k_2 \in K$ olur. Onun izi

$$\int_K F(k,k)dk'$$

dur. Bu nedenden onun karakteri kolay hesaplayabiliriz. Sonucu olarak,

$$\mu_j(t) = \operatorname{sgn}^{m_j}(t)|t|^{is_j}$$

ise, s_j reel, (20) numarılı denklemde $\beta_+ = \operatorname{sgn}^{m_1}(t_1)\operatorname{sgn}^{m_2}(t_2)$, $\beta_- = \operatorname{sgn}^{m_1}(t_2)\operatorname{sgn}^{m_2}(t_1)$. (22) numaralı denklemde $\beta_+ = \beta_- = 0$. Gerekli olan tümlemeleri (integralları) kendiniz hesap edebilirsiniz. s_1, s_2 sayıları $(18'')$ ve (19) numaralı formülleri bulunan is ve α sayılara bağıdır,

$$is_1 + is_2 = is, \qquad -s_1^2 - s_2^2 = \alpha.$$

Dolayısıyla sırası bir yana s_1, s_2 s ile α tarafından verilmiştir. Aradığımız eşleme hatırlatalım. $GL(2,\mathbb{R})$ grubunun L-grubu $GL(2,\mathbb{C})$ veya $GL(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(K/F)$ fakat (10) numaralı omomorfizmler için fark yok. Biz sadece

$$\phi : W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \to GL(2,\mathbb{C})$$

omomorfizmlerini inceleleceğiz. Istersek tanımında verilmiş $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ omomorfizmini eklenerek biz ϕ

$$W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \to GL(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

isomorfizme değiştirebiliriz.

Daha önce kullandığımız

$$\eta_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\times}$$

omomorfizmi var. μ_1 ile μ_2 $\mathbb{R}^{\times}$ grubunun iki karakter iseler,

$$\phi : w \to \begin{pmatrix} \mu_1(\eta_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(w)) & 0 \\ 0 & \mu_2(\eta_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(w)) \end{pmatrix} \tag{11$'$}$$

ϕ için bir olanaktır. Bu omomorfizmlerin ile $GL(2,\mathbb{R})$ grubun indirgenemez kabule şayan π temsillerinin eşlemesi basit değil. Ne gibi temsillere ne gibi omomorfizmler tekabül eder?

Eşlemenin en sadece en açık şekil, imgesi kayıtlı tıkız (conditionally compact) olan ϕ omomorfizmlar ile (indirgenemez kabule şayan) kıvamlı temsiller arasındaki eşlemedir. (11) veya (11$'$) numaralı şekillerde verilmiş olan ϕ omomorfizm için iki karakter μ_1, μ_2 unitär ise, eşi olan temsil tanımladığımız ana serisinde bulunan π_{μ_1,μ_2} temsilidir.

Şu ana kadar (12) numeralı formülde verilmiş ϕ omomorfizmlerine eşi olan temsili önermedik. Bunun için kesikli sıraya ihtiyacımız var. $GL(2,\mathbb{R})$ grubu için biz bu sıranın temsilleri birkaç yöntemlerle meydana getirebiliriz. Harish-Chandra'nın kullandığı yöntemler en iyidir. Onun yöntemler analitiktir ve onunla her kesikli sırası var olan küçülebilir grup için içerdiği her temsili verilir. Bu nedenden tam olarak değilse bile bu yöntemin $GL(2)$ için nasıl uygulanmasınıanlatmak isterim.

Başlamamdan evvel önemli bir soruna dokunmak isterim. Arkimedyan olan yerel cisimler için Harish-Chandra sayesinde kıvamlı temsillerini anlıyoruz. Kıvamlı olmayan fakat otomorf temsiller kuramı için çok önemli olan temsillerin olmasına rağmen çok indirgenemez temsil var. Arthur tahminlerimize göre kuramında gerekli olan temsilleri meydana konup ayırladı. $Gl(2)$ için bu ayırıl mış olan temsillerin arasında bulunan ama kıvamlı olmayan çok az unitär temsil var. Hepsi bir boyutlutur,

$$g \in GL(2,\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{sgn}^m(\det g)|g|^{is}, \qquad m = 0, 1, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Fakat diğer gruplar için biz bu temsilleri henüz anlamıyoruz. Ali Beyin konuşmalarında bu temsillerin neden önemli olmasını anlayacaksınız. Her halde bir araştırma problem ararsanız, buyurun.

Ikinci belki daha zor olan problem var. Arkimedyan olmayan(!) yerel cisimler için biz kıvamlıtemsilleri bile anlamıyoruz. Ngô Bau Chaô'nun asıl önteoremin ispatı okurken bu problemin çözümü huysuz demletler (perverse sheaves) kuramına ait olmasında ikna oluyorum. Bu soru da Ali Beyin konuşmalarına aittir. Şu ana kadar bu soru hakkında düşünmek için ne zaman ne de kuvvetim vardı. İstanbul'dan evime döneceğimde bu sorunu ele alacağım.

Fikirlerim şöyle. Ilk önce Harish-Chandra'nın teorisinde uygulanan asıl ilke bir (sarsılmaz değişmez=stably invariant) karakter Hitchin temelindeki (değişkenlerinin özdeğerleri olan) bir fonksiyon olarak bir $\mathcal{D}$-modülde bulunur, yani bir diferansiyel denklemin bir çözümdür. Herkesin iddia ettiği gibi "bir $\mathcal{D}$-modül" bir "huysuz demlet" eşdeğer kavramlardır. Ben ise, henüz anlamıyorum. Evime döneceğimde bu teorilerle uğraşacağım. Siz de isterseniz, arkimedyan olmayan yerel cisimler için yararlı bir kuram geliştirmeye girişebiliriz. En azından açık ki bu alanda gerek olan kuram henüz yok!

Biz şimdi her ayrıntı vermeden Harish-Chandra'nın yöntemlerinin $GL(2,\mathbb{R})$ grubu (veya $SL(2,\mathbb{R})$ grubu için) nasıl uygulandığını anlatalım. Ilk önce kıvamlı fonksiyon ve kıvamlı dağılım ne olduğunu anlatalım. Doğru çizgide bir f Schwartz fonksiyon

$$(1+|x|)^m \| |\frac{d^n f}{dx^n}| \leq C_{m,n} \qquad \forall m,n \geq 0$$

şartlarla tanımlanır. Tabii ki öyle bir fonksiyon ile türevleri süreklidir. Bir kıvamlı dağılım ise, Schwartz fonksiyonlarin cümlesinin üstündeki bir sürekli doğrusal fonksiyondir.

$GL(2,\mathbb{R})$ grubunda Schwartz fonksiyonun tanımı benzerdir fakat farklı. f bir Schwartz fonksiyon ise f sonsuz türevlenebilirdir. Türevleri fHer $g \in GL(2,\mathbb{R})$

$$g = k_1 \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & e^{x_2} \end{pmatrix} k_2, \qquad x_1, x_2 \in R.$$

şekilde yazılabilir. $||g|| = \sqrt{x_1^2 + x^2}$ olsun. Schwartz uzayın f fonksiyonu içerme şartlar şöyle ifade edilebilir. D_1 herhangi bir sağ değişmez diferensiyal işlemci ve D_2 herhangi bir sol değişmez işlemci olsun. Her $m \geq 0$ için uygun bir $C = C(D_1, D_2, m)$ sabitiyle

$$|D_1 D_2 f(g)| \leq C \frac{e^{-|x_1 - x_2|/2}}{(1+||g||)^m}. \tag{24}$$

Yeni ile eski şartların arasındaki farkının nedeni geometriktir. $GL(2,\mathbb{R})$ içerindeki mesafe ve kütleye göre $|x_1 - x_2|$ büyük ise, Merkezi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olan ve g noktasından geçen kürenin yüzeyi veya hacmi yarıąpi ayni olan olağan bir kürenin yüzeyi veya hacmi çok daha büyüktür. (24) numaralı formülde payi bu farkin ifadesidir.

$GL(2,\mathbb{R})$ grubunun Haar kütlesini kısaca hesaplayalım. $g = (a_{ij})$ ve $e^{x_i} = t_i$, $i = 1,2$ olsunlar.

$$dg = \frac{\wedge_{i,j} da_{ij}}{|\det^2 g|} = \alpha(t_1, t_2) dk_1 dt_1 dt_2 \tag{25}$$

denklemi açıktır.

$$k_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
$$k_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

olsunlar. $dk_1 = d\theta$, $dk_2 = d\varphi$. (25) numaralı denklemin $\theta = \varphi = 0$ noktalarında incelenmesi yeter. O noktalarda

$$\frac{(dg_{ij})}{|\det^2 g|} = \frac{1}{t_1^2 t_2^2}\left\{\begin{pmatrix} 0 & d\theta \\ -d\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dt_1 & 0 \\ 0 & dt_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d\varphi \\ -d\varphi & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Yanlışım yoksa kısa bir hesaptan sonra biz bu formülden

$$\left(\frac{t_1}{t_2} - \frac{t_2}{t_1}\right)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} = (\exp(x_1 - x_2) - \exp(x_2 - x_1))dx_1 dx_2 \tag{26}$$

formülünü elde ederiz. $|x_1 - x_2|$ büyük ise, $|\exp(x_1 - x_2) - \exp(x_2 - x_1)|$ çok büyük! Bu hesaplar çok güzel değil, fakat herkesin Harish-Chandra teorisinin bir bakımda alışılmış harmonik analiz tarafından etkilenmiş olduğ̆bilmesi önemlidir. Ayni zamanda Harish-Chandra teorisi çok daha derindir!

Bu teori önemli bir bakımda bir tayf (spectral) teorisidir. Özfonksiyonlar karakterlerdir. Her tayf teorisi gibi bu teoride fazla özfonksiyonlar var ve en önemli özfonksiyonlar L^2-uzayın bir (kısmen kesikli kısmen sr̆ekli) tabanı teşkil eden özfonksiyonlardur. Bu tabanın öğelerini kesinlikle belirtmek için kıvamlı dağılımın kavramına ihtiyacımıza ihtiyacimiz var.

Geliştirdiğin kuramında Harish-Chandra olağan her analitik gereğe yeterli olan özfonksiyonları meydana koymuştu. Başka gereklere yeterli olmazsa bile, mesela otomorfik temsillerin kuramı için bazı ilavelere ihtiyacımız varsa, onun kuramını kullanmadan adeta hiçilerleyemeyiz. Bir defa daha tekrarlıyorum. Arkimedyan olmayan yerel cisimler için biz hala benzer bir kuram arıyoruz. Bence, bu teori kısmen aritmetik kısmen analitik olacak.

Bu fikirleri ifada ettiğimden sonra $GL(2,\mathbb{R})$ teorisine dönelim. (26) numaralı formül kullanan kaba bir hesapa göre $GL(2,\mathbb{R})$ üstündeki bir f fonksiyonu için yeterli büyük bir $m > 0$ ile

$$|f(g)| \leq c\frac{e^{-|x_1 - x_2|/2}}{(1 + ||g||)^m}, \qquad c \text{ sabit} \tag{27}$$

eşitsizliği geçerli ise,

$$\int f(g)dg$$

tümlemesi sonlu olur. Bu ifadenin bir dikkatinizi çekmek istediğim sonucu var. f bir Schwartz fonksiyonu ve χ herhangi bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $m \in \mathbb{R}$

$$|\chi(g)| \leq ce^{-|x_1 - x_2|/2}(1 + ||g||)^m, \qquad csabit \tag{28}$$

ise,

$$\int |\chi(g) f(g)| dg < \infty$$

ve

$$f \to \int \chi(g) f(g) dg$$

kıvamlı bir dağılımdır.

Biz (27) ile (28) numaralı formülleri olağan $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^n$ üstündeki kurama benzetsek, ikisine ortak ama olağan kuramda mevcut olmayan bir çarpanı olan $e^{-|x_1-x_2|/2}$ g"orürüz. Iki eşitsizlik ortak olan çarpan, birincisinin paydasında, ikincisinin payında, olağan kuramdan tanıdığımız çarpandır. Yani, doğru çizgide Schwartz f fonksiyonu ve herhangi bir $m > 0$ için

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|)^{-m}$$

eşitsizliği geçerlidir ve kıvamlı χ dağılımı ve en az bir $m > 0$ için

$$|\chi(x)| \leq c(1 + |x|)^m.$$

Bir yanda $\mathbb{R}^+$ veya $\mathbb{R}^\times$ ile diğer yanda $GL(2, \mathbb{R})$ arasındaki fark $e^{-|x_1-x_2|/2}$ çarpanıdır.

(20), (21) ve (22) numaralı formüllere dönelim. Aslında (28) numaralı formüle göre χ_π karakterinin kıvamlı olması için τ_π sinirli bir fonksiyon olması gerektir. Onların çok olmasına rağmen burada söz konusu olmayacak. Bildiğim kadar bir boyutlu temsiller bir yana otomorf temsiller kuramında ortaya çıkan temsillerin hepsi kıvamlıdır. Bu Ramanujan'ın varsayımıdır. Çok basit olmasına rağmen bir boyutlu teslimler meydana çıkar ama hoş karşılanmaz. Ali'nin konuşmalarında mevcut olmasının sonuçlarını göreceğiz.

Konumuz olan probleme dönüyoruz. Harish-Chandra'nın da genel problemle uğraşarken karşılaştığı zorlukları hatırlayalım. İlk önce genel bir grup için kesikli sırasını dolaysız kuramayız. Onu kurup niteliklerinin anladığımdan sonra daha kolay yöntemler bulunurdu, fakat ilk gerçek zor olan adım için genel ilkeleri uygulamadan başka yol yoktu.

Genel ilkeleri her fizikçi iyi bildiği sonlu ve tıkız grupların kuramından alına bilir.
(1) $\pi : g\ (\pi_{ij}(g))$ indirgenemez bir teslim ve onun karakteri χ_π ise, tabanını $\pi_{i,j}(\cdot)$ fonksiyonlarının teşkil ettiği uzay

$$\left\{ g \mapsto \int_G f(h)\chi_\pi(hg)dh \right\},$$

uzayıdır. f fonksiyonlarının desteği tıkızdır.
(2) π_1 ile π_2 indirgenemez ve farklı ise,

$$\int_G \chi_{\pi_1}(g)\bar{\chi}_{\pi_2}(dg) = 0.$$

(3) π temsili indirgenemez ise,

$$\int_G \pi_{ij}(g^{-1}\gamma g)dg = \frac{\chi_\pi(\gamma)}{\dim \pi}. \tag{29}$$

Tıkız olmayan gruplar için de ayni ilkeler geçerlidir ama teori çok fazla zorla kurulabilir. Knapp'ın katabına bakarsanız kurulunun ne kadar zor olduğunu anlarsınız. Ben ise $GL(2, \mathbb{R})$ için (20), (21), (22) formüllere ait fikirleri anlatmak isterim. Ana seri için (20) numaralı formülde $\beta_+ = \operatorname{sgn}(t_1)^{m_1} \operatorname{sgn}(t_2)^{m_2}$ ve $\beta_- = \operatorname{sgn}(t_1)^{m_2} \operatorname{sgn}(t_2)^{m_1}$ olabilir. Bu şekilde biz τ_π fonksiyonlarını kullanarak köşegen matrisların üstündeki simetrik fonksiyonların bir tabını elde ederiz. Kesikli seriyi elde etmek için, biz (22) numaralı formülü uygularız. Maalesef bu formül çok uygun değil. τ_π fonksiyonu $t_1 \neq t_2$ bölgesinde sürekli olmalı.

$t_1 = ae^{i\theta}$, $t_2 = ae^{-i\theta}$ iseler,

$$D(g) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}.$$

Değiķeni θ olarak $\chi_\pi(\theta) = \chi_\pi(-\theta)$ fakat $D(\theta) = -D(-\theta)$. Dolayısıyla

$$\tau_\pi(\theta) = -\tau_\pi(-\theta)$$

ve

$$\begin{aligned}\beta_- &= -\beta_+ = \beta \\ \tau_\pi &= \beta\left(e^{im\theta} - e^{-im\theta}\right)\end{aligned}$$

$\beta = -1$ belirtilmesi için (29) numaralı denkleme benzer fakat ispatı daha zor olan bir denklem uyguluyoruz.

Biz kıvamlı karakterlerin eşleme değişmez fonksiyonların tayf veya analitik anlamda bir tabanıolduğunu bekleriz. Ana sırasının her öğesinin karakteri elliptik sınıflarda sıfır olur ve hiperbolik sınıflarda olağan Fourier analizi verir. Fazla kalan kesikli serinin eliptik öğelerinde bir taban teşkil eder. Bu nedenle hiperbolik öğelerde değerleri önemsiz. φ eşleme değişmez bir fonksiyon ise,

$$\psi(t_1, t_2) = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})\phi(t_1, t_2) \tag{30}$$

karşi simetrik bir fonksyondur. (22) numaralıdenklemin işaretleri kullanırsak analitik anlamda

$$-\alpha^{is}(e^{im\theta} - e^{-im\theta}),$$

$s \in \mathbb{R}$, $m > 0$, (30) numarılı denklem geçerli olan fonksiyonar için analitik anlamda bir taban eşkil eder. Dolayısıyla eliptik öğelerde karakterler basit bir kesirdir,

$$-\alpha^{is}\frac{e^{im\theta} - e^{-im\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}.$$

Hiperbolik öğelerin cümlesinde nasıl görülür. (21) numaralı denklemde gibi, orada

$$\chi(t_1, t_2) = \frac{\beta_+ t_1^{is_1} t_2^{is_2} - \beta_- t_1^{is_2} t_2^{is_1}}{\sqrt{t^1/t^2} - \sqrt{t^2/t^1}}.$$

$t_1/t_2 \geq 1$ bir reel sayı olduğunu farzedebiliriz. Ilk olarak χ_π K̈ıvamlıbir dağılım ise, χ öz fonksiyon ise, $s_1 + s_2 = s$ ve $s_1 - s_2 = \pm im$. $(s_1 - s_2)/2 = -im$, $m > 0$, olduğu zannedebiliriz. O zaman s reeldir be

$$\begin{aligned}\chi(t_1, t_2) &= (t_1 t_2)^{is/2}\frac{\beta_+(t_1/t_2)^{is_1/2 - is_2/2} - \beta_-(t_1/t_2)^{is_2 - is_1}}{\sqrt{t^1/t^2} - \sqrt{t^2/t^1}} \\ &= (t_1 t_2)^{is/2}\frac{\beta_+(t_1/t_2)^{m} - \beta_-(t_1/t_2)^{-m}}{\sqrt{t^1/t^2} - \sqrt{t^2/t^1}}\end{aligned}$$

Bu dağılım kıvamlı ise, $\beta_+ = 0$. β_- sabitini nasıl belirleyebiliriz. Hiperbolik öğeler ile eliptik öğelerin arasındaki $t_1 = t_2$ sınırı var. Her karakterin bir diferansiyel denklemin bir çözümü olduğundan bu tekil noktalarda özel bir şekilde davranmalı. Bu davranışın sayesinde β_- değerini hesap edilebilir.

Harish-Chandra'nın kuramına bu giriş ile ne anlatmak isterim? Bu teori az kavranmış ise bile aslında somut bir analitik teori ve matematikte yirmi yüzyılın harika kazanması olduğu vurgulamak isterim.

GEOMETRİK KURAM