PROJET DE FIN D'ETUDES

pour obtenir le diplôme de

Université Galatasaray
Spécialité : **Mathématiques**
Directeur : **YILMAZ AKYILDIZ**

ÉQUILIBRE DE NASH

préparée par **Elcin SARIKAYA**

Juin '12

THÈSE

pour obtenir le diplôme de l' **Université De Galatasaray**

Spécialité : **Mathématiques**

Directeur : **YILMAZ AKYILDIZ**

ÉQUILIBRE DE NASH

préparée par **Elcin SARIKAYA**

Juin '12

INTRODUCTION

Si on disait la vie, lui-même, est un jeu stratégique, on ne aurait pas du tout tort. Car, dès l'enfance jusqu'à la mort, nous sommes dans une intéraction avec des personnes et nous attendons, le plus souvant, une gain à la suite de interactions. Pour atteindre les but personnels, parfois on agit égoïstement envers les gens et parfois nous nous mettons d'accord avec eux. Ceux-ci définissent, en fait, un jeu strategique.

John F. Nash, Jr. est l'un des scientifiques les plus connus au monde grâce à ses études sur la théorie des jeux. Il s'est interéssé aux jeux stratégiques joués par des joueurs rationnels. En 1949 John Forbes Nash a écrit "le théorème fondamental de la théorie des jeux à n-joueurs" dans sa thèse appelée "Jeux non-coopérative". Dans cette thèse, Il a introduit la fameuse notion l'équilibre de Nash. Nash a aussi présenté le problème de négotiation qui concerne les jeux coopérative.

Dans cette thèse, on commence par définir les notions de la théorie des jeux et le jeu stratégique avec ses propriétés. Ensuite, on explique l'équilibre de Nash et on présenté les jeux plus connus de la thérie des jeux du point de vue de l'équilibre de Nash.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Prof. Yılmaz Akyıldız, pour m'avoir fait confiance en me laissant une grande liberté et en me faisant l'honneur de me déléguer plusieurs responsabilités.

Mes remerciements vont également à Prof. Meral Tosun, pour la gentillesse et la patience qu'elle a manifestées à mon égard et pour l'aide qu'elle m'a apportée au cours de cette recherche. Son intérêt et ses précieux conseils m'ont été d'un grand profit.

Je remercie à tous mes professeurs du département de mathématiques, en particuluier Mme Ulus Yıldız dont le cours de la Théorie des jeux m'a assisté beaucoup, pour m'avoir donné la connaissance mathémathique grâce à laquelle j'ai été capable d'écrire ma thèse.

Un grand merci à tous mes amis, en particulier à Ceren Tozlu qui m'a appris les bases de LaTeX.

Merci enfin à ma famille, notamment à mes parents et Burçin dont l'affection et les encouragements m'ont rendue la vie vraiment plus agréable.

Table des Matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Glossaire

Définition 1.1.1. *Un **joueur** est la personne qui fait la décision dans un jeux.*

Définition 1.1.2. *Une **stratégie** est la spécification du comportement d'un joueur dans n'importe quelle situation.*

Définition 1.1.3. *La **récompense**, est une mésure de satisfaction. Dans les jeux stratégiques, on donne une échelle numérique avec laquelle les joueurs peuvent comparer les résultats associés à chaque combinaison des choix des stratégies.*
On peut aussi l'appeler l'utilité. En générale, le nombre de la récompense plus élevé est attaché au meilleur résultat.

Exemple 1. *La compétition électorale entre des partis politiques est un jeu stratégique où les joueurs sont des partis politiques, les stratégies des partis sont des campagnes publicitaires et les récompenses sont des votes obtenus à la fin de la campagne.*

Définition 1.1.4. *Un résultat d'un jeu est **pareto-efficace** si c'est le meilleur résultat pour chaque jouer. Un résultat pareto-efficace ne peut pas être amélioré sans faire mal au moins un joueur.*

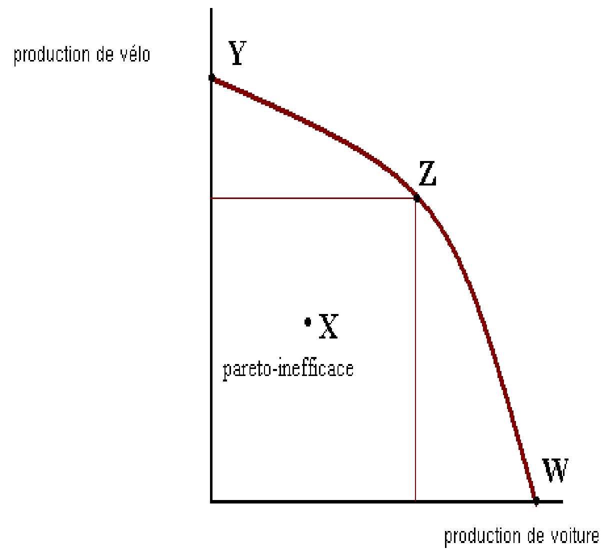

Figure 1.1: Pareto-efficacité

Sur le dessin, le point X n'est pas pareto-efficace, parce que nous pouvons produire plus de voitures sans diminuer la production du vélo en rapprocheant le point Z. Par contre, si on deplace le point Z vers le point W alors la production de la voiture augmente et la production du vélo diminue ou l'inverse vers Y. Donc, les points Z,Y et W sont pareto-efficaces.

Définition 1.1.5. *L'idée de* ***la meilleure réponse*** *est de penser à une stratégie qui est le mieux que vous pouvez faire en considérant ce que des autres font.*

Exemple 2. *Les stratégies qui m'ene au résultat Pareto-efficace sont des meilleures réponses. La r'eciproque n'est pas toujours vrai, voir la dilemme du prisonnier.*

Définition 1.1.6. *Un joueur est dit* ***rationnel*** *s'il essaye de maxisimiser sa récompense. La théorie des jeux assume, en général, les* *joueurs font le calcul et suivent parfaitement leurs meilleures stratégies. Ceci est dit le comportement rationnel.*

Exemple 3. *Imaginons que vous voulez acheter une voiture dont vous avez déjà choisi le marque et vous visitez deux vendeurs de voitures d'occasion. Ils vendent exactement la même voiture mais le premier vendeur la vend à 5.000 euro et l'autre à 6.000 euro. Si vous êtes rationnel, vous choissez celle à 5.000 euro.*

Définition 1.1.7. *Un fait ou une situation est une* ***connaissance commune*** *si tous les joueurs le connaissent, et savent que les autres le connaissent.*

Exemple 4. *La rationalité des joueur est une connaissance commune.*

Définition 1.1.8. *Une* ***stratégie mixte*** *est une randomisation avec des probabilités données qui déterminent la décision du joueur.*

Exemple 5. *Dans un jeu stratégique, si un joueur décide ses stratégies à pile ou face, on les appelle stratégies mixtes.*

Définition 1.1.9. *Une* ***stratégie pure*** *définit une action spécifique qu'un joueur va suivre à chaque situation possible dans un jeu. Une telle stratégie ne peut pas être aléatoire.*

Exemple 6. *La stratégie pure est un cas particulier de stratégie mixte où la probabilité de la straégie chosie est 1, et des autres sont 0.*

Définition 1.1.10. *Deux biens sont des* ***substituts parfaits*** *si le consommateur peut complètement substituer un bien à l'autre. Peu importe la composition des deux biens, ce qui importe est la quantité totale.*

Exemple 7. *Un ordinateur produit par deux entreprises diffèrents, disons Acer et Casper, est un substitut parfait. Dans un marché où il n'y a que Casper et Acer, si Casper augmentent le prix des ordinateurs alors les consummateurs les substituent avec les ordinateurs d'Acer. Dans ce cas, la quantité totale des achats ne changera pas.*

Définition 1.1.11. *Un jeu est à* ***information complète*** *si chaque joueur connait tous les autres joueurs, le chronomètrage du jeu et l'ensemble de stratègies et des rècompenses pour chaque joueur.*

Exemple 8. *Le jeu de dames est un jeu à information complète dont tous les éléments sont connus par les joueurs.*

Définition 1.1.12. *Un jeu est* ***fini*** *si les nombres des joueurs et des stratégies sont finis.*

Exemple 9. *L'échecs est un jeu fini où il n'y a que deux joueurs et ses stratégies sont finis.*

1.2 La théorie des jeux

Les psychologues appellent la théorie des situations sociales ce que les économistes appellent la théorie des jeux. La théorie de jeux se focalise sur l'analyse des comportements humaines et permet de décrire nombreuses relations économique et sociales sous la forme de jeux stratégique[1].

Il y a deux branches principales : Théorie des jeux coopérative et Théorie des jeux noncoopérative.

La théorie des jeux coopérative décrit les résultats qui apparaissent quand les joueurs viennent ensemble dans différentes combinaisons[2]. La théorie des jeux non-coopérative s'intéresse comment les individus rationnels interagissent entre eux afin d'atteindre leurs propres but. Dans cette théorie, un jeu est une modèle détaille de tous les stratégies et les résultats valables pour chaque jouer.

Le premier théorème formel dans la théorie de jeux a été prouvé par Antoine Cournot en 1838. Cournot a présenté une modèle de la manière suivante :

Définition 1.2.1. *(Duopole de Cournot) Une modèle de duopole est le jeu stratégique dans lequel*

1. *Les joueurs sont des entreprises,*
2. *Les actions de chaque entreprise sont des productions possibles,*
3. *Les récompenses de chaque entreprise sont ses profits.*

On verrà un exemple de la duopole de Cournot plus tard.
En 1928, John von Neumann a énoncé sont théorème de Minimax, qui a été un vrai progrès dans l'histoire de le théorie des jeux. La théoreme dit, dans un jeu non-coopératif à nombre fini de stratégies pures et è somme nulle qui est joué par deux joueurs à information complète, il existe au moins un point d'équilibre, dans laquelle personne n'a intérêt à changer sa stratégie mixte si l'autre ne la change pas.

Le progrès suivant a été représenté par la publication de "Theory of Games and Economic Behavior "[3] en 1944, aux Etats-Unis, qui était le résultat d'une collaboration de von Neumann et l'économiste Oskar Morgenstern. On considère en générale cet événement comme le début de l'existence de la théorie des jeux comme une discipline mathématique. Von Neumann et Morgenstern ont commencé avec une formulation détaillée du problème économique et ont montré les possibilités d'application de la théorie des jeux à l'économie.[4]

Théorèm 1.2.2. ***de Von Neumann*** *Considérer un jeu fini à somme nulle à deux joueurs. Soient θ la stratègie mixte choisie par le premier joueur et η la stratègie mixte choisie par le deuxiéme joueur. Si l'on indique la récompense attendue par le premier joueur de la forme bilinéer $h(\theta, \eta)$, alors il existe toujours des stratégies mixtes θ_*, η_* tel que:*

$$h(\theta_*, \eta_*) = max_\theta min_\eta h(\theta, \eta) = min_\eta max_\theta h(\theta, \eta) \text{ [5].}$$

1.3 Qu'est-ce qu'un jeu stratégique

Un jeu est une interaction entre plusieurs joueurs dont le résultat dépend des stratégies de chacun. Plus précisement, une personne est engagée dans un jeu stratégique avec une autre personne (ou plusieurs personnes) si son utilité et ses gains sont affectés non seulement par les actions qu'il effectue mais aussi par les actions des autres.

Définition 1.3.1. *Un jeu stratégique a n-joueurs definie par :*

(1) Un ensemble, $N = 1, 2, ..., n$, des joueurs,
(2) Pour chaque joueur i, un ensemble des stratégies $S_i = (s_1, ..., s_n^i)$,
(3) Pour chaque joueur i, une fonctions d'utilité $u_i : S_1 \times ... \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$.
On note $S = S_1 \times ... \times S_n$ l'espace des stratégies.

Les joueurs ont des stratégies qui mènent aux résultats différents avec des récompenses associées.[6]

Exemple 10. *Examinons un jeu stratégique:*

Dans ce jeu, les joueurs sont Alice et Frank. Chacun d'eux n'a que deux stratégies a jouer : Aller ou Rester.
Ici, les récompenses sont exprimé aves les nombres, celle d'Alice à gauche et celle de Frank à droite. Notez que, en générale, le nombre de la récompense plus élevé est attaché au meilleur résultat.
Maintenant, nous regardons les meilleurs réponses de chaque joueur.

		Frank	
		Aller	Rester
Alice	Aller	3 , 2	4 , 5
	Rester	3 , 1	2 , 4

Figure 1.2: Jeu stratégique

Si Alice choisit la stratégie "Aller", la meilleure réponse de Frank est "Rester". Si, autrement, Alice choisit la stratégie "Rester", la meilleure réponse de Frank est toujours "Rester" qui le donne la récompense plus haute dans tous les deux cas.

1.4 Classification des jeux

Les jeux stratégiques peuvent apparaître dans plusieurs situations différentes et ont donc plusieurs propriétés différentes à étudier. Pour simplifier l'analyse, on groupe les jeux.

1.4.1 Jeux coopératifs / non-coopératifs

Si les joueurs font les décisions collectivement et avec la pleine confiance, pour que tous les joueurs profitent à la mesure possible cela est dit le jeu coopérative. Il y a les questions de négociation et la formation de coalition au sein de laquelle les joueurs cherchent à se regrouper afin d'optimiser leurs gains. Si on ne permet aucune coopération parmi les joueurs, donc nous somme dans un jeu non-coopérative, où on étudie les réactions individuelles des joueurs face aux stratégies adoptées par leurs adversaires.

Exemple 11. ***(a)*** *Le poker est un jeu non-coopératif. Parce que, les gains d'un joueur sont les pertes de l'autre.* ***(b)*** *Deux entreprises rivals peuvent se coopérer à un nouveaux investissement et le jeu non-coopératif entre eux devient un jeu coopératif.*

1.4.2 Jeux simultanés/séquentiels

Dans un jeu stratégique si les joueurs decident leurs action simultanément, alors on va l'appeler jeu simultané. Contrairement, si les joueurs decident leur actions l'une après l'autre, on dirais alors c'est un jeu séquentiel.

Exemple 12. ***(a)*** *L'échecs est un jeu séquentiels. Les joueur décident leur stratégie l'un après l'autre.* ***(b)*** *Le tir de penalty est un jeu simultané, parce que le tireur de penalty et le gardien de but se décident leur stratégie simultanément.*

1.4.3 Jeux répétés

Les jeux répétés sont des jeux qui sont joués plus qu'une fois. Les joueurs peuvent choisir les actions différentes en considérant combien de fois un jeu va être joué. Parce que, l'expérience que les joueur ont acquies après les répétition est importante pour définir les actions suivantes. En plus, certain joueur pourrait choisir de perdre au début afin de ganger plus à la fin.

Exemple 13. *Le tennis est un jeu répété. Un joueur gagne le set s'il atteint 7 points, mais le match se déroule au minimum deux sets.*

1.4.4 Jeux à somme nul/somme constante

Un jeu à somme nulle est un jeu où la somme des utilités de tous les joueurs est égale à 0, donc quand un joueur gagne, l'autre perd dans la même échelle. Dans les jeux à somme positif, les jouers peuvent perdre ou gagner à l'échelle différente. Donc, la somme des récompense est égale à une constante c fixe.

Exemple 14. *Le jeu Pierre Feuille Ciseau est un jeu à somme nulle. Le jeu du duopole de Cournot est un jeu à somme constante. Parce que, la somme des gains est égale à la quantité totale de production qui ne change jamais.*

1.5 Représention des jeux

On représente le jeu simultané à 2-joueurs aves des stratégies finies sous la forme de la matrice des gains. Examinons la matrice des gains ci-dessous.

		Zeynep	
		A	B
	A	3,4	5,2
Mehmet	B	6,1	3,8

Figure 1.3: Matrice de gains

A chaque coté de matrice des gains, on écrit les stratégies valables A, B de Mehmet et Zeynep. A la cellule où une stratégie de Mehmet et une stratégie de Zeynep coincident, on écrit l'utilités de chaque joueur de façon que l'utilité de Mehmet à gauche et celle de Zeynep à droite.

Les jeux séquentiels sont représentés, en générale, sous la forme extensive, aussi appelée l'arbre de décision dont chaque point est associé au joueur qui décide. Chaque branche représente une stratégie. Les récompenses de tous sont associés aux feuilles de l'arbre.

Dans le jeu séquentiel ci-dessous:

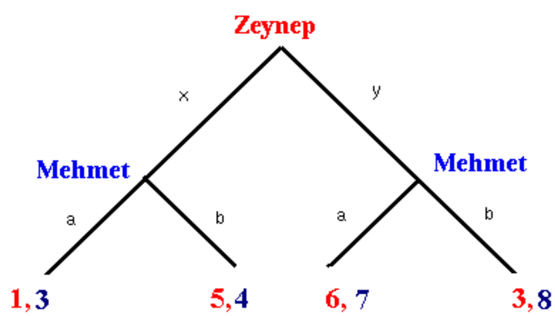

Figure 1.4: Forme extensive

Zeynep commence au jeu et elle a deux stratégies possibles x et y. Après la décision de Zeynep, Mehmet fait son choix entre ses stratégies a et b. On montre la récompense de Zeynep à gauche et celle de Mehmet à droite aux feuilles de l'arbre.

Chapitre 2

Equilibre de Nash

2.1 Définition

J. F. Nash a appliqué la théorie des jeux à toutes les formes d'intéraction humaine. Nash a montré qu'un système poussé par le méfiance et l'égoïsme pourrait toujours y avoir un point d'équilibre dans lequel l'intérêt personnel de chacun est parfaitement équilibré l'un contre l'autre.

Dans une telle intéraction, on suppose que les jouers sont seuls et égoïste. La stabilité d'équilibre donc arriverait seulement si chacun se comportent égoïstement. Parce que s'ils coopèrent le résultat devient imprévisible. D'ici, on comprend bien que l'idée n'est pas coopérative.

Un équilibre de Nash est un état dans lequel aucun joueur ne souhaite changer sa stratégie en tenant compte les stratégiques choisies par les autres joueurs. Chaque stratégie est une meilleure-réponse aux stratégies des autres $(n-1)$-joueurs[7].

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le nombre des joueurs et S_i l'ensemble des stratégies du joueur i. On appelle une profile de stratégie $s = (s_1, s_2, ...s_n) \in S_1 \times ... \times S_n$ où s_i est la stratégie du joueur i. On note par $\hat{s}_i = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}...s_n)$ la profile de stratégies des autres $(n-1)$joueurs.

Définition 2.1.1. *Avec les notation précedentes, s est une équilibre de Nash si, pour $\forall i \in \mathbb{N}^*$, le choix s_i du joueur i est sa meilleure réponse aux choix $\hat{s}_i$ des autres $(n-1)$joueurs.*

($\Leftrightarrow$ pour $\forall i \in \mathbb{N}^*$ et $k_i \in S_i$, $u_i(s) \geq u_i(k_i, \hat{s}_i)$ où u_i est la fonction de la récompense du joueur i.)

Théorèm 2.1.2. *(de Nash) Soit G un jeu fini. Alors il existe un équilibre de stratégies mixtes pour G [8].*

Ceci est la solution la plus généralement utilisée dans la théorie des jeux. Pourtant, il y a des jeux dans lequel les joueur ne jouent pas toujours un équilibre de Nash dans un premier temps. Mais, si c'est un jeu répété alors le premier résult converge à l'équilibre de Nash par suite de la répétition.

Exemple 15. *Imaginer un jeu où on demande à une groupe de personnes (joueurs) d'écrire un numéro entre 1-100 de la façon qu'il soit plus proche à la moyen arithmétique de tous.*
Les études déjà faits nous indiquent, dans un premier temps, la moyenne sera entre $30 - 40$*. Il est donc assez loin d'équilibre de Nash de ce jeu qui est* 1*. Mais si les joueurs jouent le même jeu plusieurs fois, la moyenne convergera à* 1*.*

Néanmoins, il y a trois motivations pour joueur l'équilibre de Nash dans un jeu. On peut définir ces motivations de la manière suivante :

1) Aucun regret

L'idée d'aucun regret dit, au point d'équilibre de Nash, si on tient les stratégies de chacun fixé, aucun individu n'a une motivation stricte de s'éloigner du point d'équilibre. Donc aucun individu ne peut avoir une strictement meilleure récompense en changeant sa stratégie, quand les actions de chacun d'autres sont fixés.

Pourquoi nous l'appelons aucun regret ? Cela signifie ayant joué le jeu, vous avez en fait joué un équilibre de Nash et ensuite vous regardez ce que vous avez fait et vous savez ce que tous les autres ont fait, alors vous dites :
-"Regrette-je mon action ? "
-"Non, j'ai fait de mon mieux en considérant ce qu'ils ont fait."
Donc si tous les joueurs ont annoncé leurs stratégies simultanément, personne ne voudrait reconsidérer.

2) Les croyances auto-réalisatrices

Une deuxième idée est qu'un équilibre de Nash peut être considéré comme une croyance auto-réalisatrices. Cela veut di que si un joueur croit que - si tout le monde dans le jeu croit que tous les autres vont jouer leur partie d'un équilibre de Nash, alors chacun jouera, en fait, leur partie d'équilibre de Nash. Nous voyons que ceux-ci sont des croyances auto-réalisatrices.

3) Les accords auto-exécutoire

Une troisième motivation est qu'un équilibre de Nash est un accord auto-exécutoire, c'est-à-dire un accord entre deux joueurs qui est mis en application seulement par ces deux joueurs; un troisième joueur ne peut pas le mettre en application ni interférer et les deux joueurs se conformeront l'accord tant que cela sera dans leur intérêt.

Vu de cette façon, l'équilibre de Nash aide à clarifier une distinction faite entre des jeux "coopératifs" et "noncoopératifs", avec des jeux coopératifs étant ceux dans lesquels les accords peuvent mettre en application et des jeux noncoopératifs étant ceux dans lesquels aucun tel mécanisme d'exécution n'existe, donc les accords d'équilibre sont durables.[9].

2.2 Comment trouver l'équilibre de Nash

L'équilibre de Nash peut être trouvé par une recherche de stratégies dominantes, par l'élimination successive de stratégies dominées, ou par l'analyse de meilleure réponse. Sur les jeux à somme nulle on pourrait aussi appliquer la méthode de MiniMax qui nous donne l'équilibre de Nash[10].

2.2.1 Domination

Puisque tous les joueurs sont assumés d'être rationnels, ils font les choix qu'ils préfèrent le plus, en réflechissant ce que les autres font.

Dans certains jeux, un joueur peut avoir deux stratégies A et B tel que, étant donné n'importe quelle combinaison des stratégies des autres joueurs, la stratégie A soit meilleure que la stratégie B. Alors on dit la stratégie A domine la stratégie B ou la stratégie B est dominée par la stratégie A. Un joueur rationnel ne veut jamais jouer une stratégie dominée. Alors, on elimine les stratégies dominées dans un jeu et cela nous aide à trouver l'équilibre de Nash facilement.

Exemple 16. *Regardons le jeu suivant :*

-Jouer : (Saniye, Sarper)
-Stratégies de Saniye: A, B, C
-Stratégies de Beta : A, B

A est une stratégie dominante de Sarper et elle domine strictement B. Parce qu'on a $(6 > 2, 5 > 4$ *et* $7 > 3)$.

En effet, la stratégie A donne toujours l'utilité plus haut que la stratégie B. Donc, Sarper jouera toujours la stratégie A indépendemment ce que Saniye choisit. Saniye n'a pas de stratégie dominante. Pourtant, on note que A est une stratégie dominée de Saniye qui donne l'utilité le plus bas.

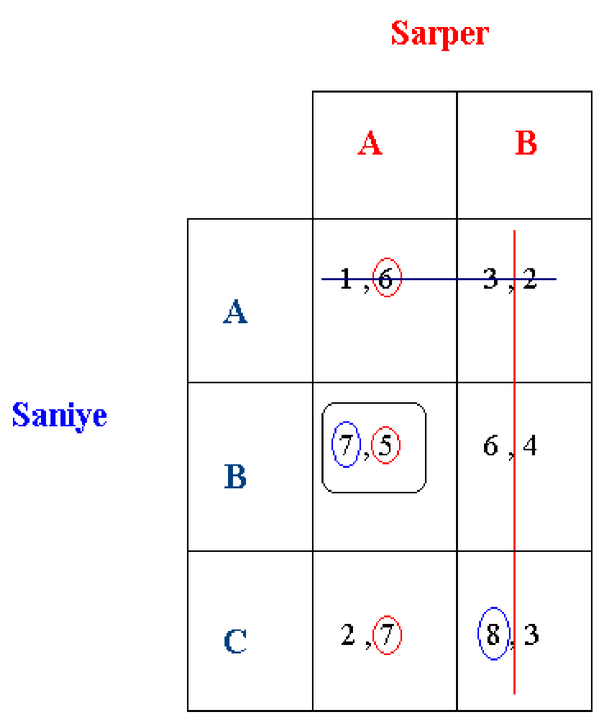

Figure 2.1: Domination

Dans ce cas, Saniye ne jouera jamais la stratégie A, donc nous pouvons l'éliminer. Il nous reste un jeu de la façon suivante :

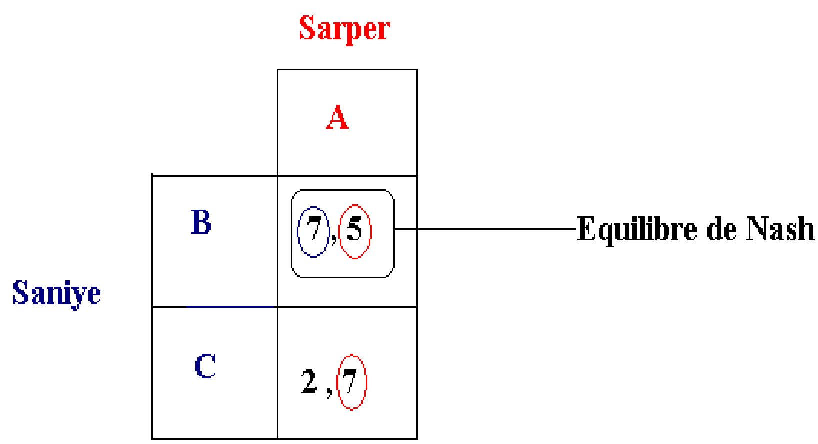

Figure 2.2: Après l'élimination

Comme Sarper ne joue que A, Saniye joue la stratégie B qui donne la récompe plus haut par rapport que la statégie C (7 > 2), *alors l'équilibre de Nash est (B,A).*

2.2.2 Analyse de meilleure réponse

Plupart des jeux simultanés n'ont pas de stratégie domainante ni stratégie dominée. Dans ce cas-là, on fait l'analyse de meilleure réponse pour chaque joueur. Tout simplement, nous regardons la meilleure réponse d'un joueur par rapport à toutes les stratégies des autres et nous faisons cette analyse pour chaque joueur. Donc, cette analyse est une bonne moyenne de trouver tous les équilibres de Nash possible dans un jeu.

Exemple 17. *Considèrons le jeu ci-dessous :*

Soient Tony et Boris deux jouers et $MR_t(resp.MR_b)$ la fonction de meilleure réponse de Tony (resp. Boris).

Si Boris joue X, la meilleure réponse de Tony est de jouer Y.
Si Boris joue Y, la meilleure réponse de Tony est de jouer X.
Si Boris joue Z, la meilleure réponse de Tony est de jouer Z.
Nous écrivons les fonctions de meilleure réponse comme suivante : $MR_t(X) = Y$, $MR_t(Y) = X$, $MR_t(Z) = Z$.

Maintenant, nous trouvons les meilleures réponses de j_2.
Si Tony joue X, la meilleure réponse de Boris est de jouer X.
Si Tony joue Y, la meilleure réponse de Boris est de jouer Y.
Si Tony joue Z, la meilleure réponse de Boris est de jouer Z. $MR_b(X) = X$, $MR_b(Y) = Y$, $MR_b(Z) = Z$.

Dans le tableau, On dessine un cercle bleu autour de meilleures réponses de Tony selon les choix de Boris et un cercle rouge à celles de Boris. Donc, on note que les meilleurs choix s'intersèctent en (Z,Z) qui est l'équilibre de Nash de ce jeu avec la récompense (5,5). On le note $NE = (Z, Z)$.

Boris

Tony		X	Y	Z	
	X	0 , 3	3 , 0	4 , 2	
	Y	3 , 0	0 , 3	4 , 2	
	Z	2 , 4	2 , 4	5 , 5	Equilibre de Nash

Figure 2.3: L'analyse de meilleure réponse

2.2.3 Méthode de Minimax

La méthode de Minimax est un concept de solution alternative pour les jeux simultanés. On ne l'applique qu'aux jeux à somme nulle, parce que dans ce type de jeux quand un joueur perd, l'autre gagne exactement la même quantité. Cela veut dire que le meilleur résultat d'un jouer est équivalent au pire résultat d'autre.

L'idée est de trouver la pire de meilleures réponses d'un joueur et la meilleure de pires réponses d'autre joueur. Cette logique peut sembler extrêmement pessimiste, mais il compte toujours sur un type de calcul de meilleure réponse et c'est approprié à trouver l'équilibre d'un jeu à somme nulle. Dans l'équilibre, chaque joueur choisit sa propre meilleure réponse, selon ses croyances de ce que l'autre a fait.

Exemple 18. *Nous examinons le jeu ci-dessous montré par le tableau.*

On commence en trouvant le nombre le plus bas dans chaque rang (la pire récompense de Pierre de chaque stratégie) et le nombre le plus haut dans chaque colonne (la pire récompense de Marie de chaque stratégie).

La pire récompense de Pierre de A est 3*, de B est* 1 *et de C est* 4.
La meilleure récompense de Marie de X est 4*, de Y est* 5 *et de Z est* 7.

Nous écrivons le minimum de chaque rang et le maximum de chaque colonne comme vous voyez sur le figure. Le plus grand des minimums de rang est 4*; ceci est son Maximin. Le plus bas des maximums de colonne est* 4 *qui est son Minimax.*

Marie

		X	Y	Z		
Pierre	A	3	5	7	Min = 3	
	B	1	3	4	Min = 1	MaxiMin = 4
	C	4	5	6	Min = 4	
		Max = 4	Max = 5	Max = 7		

MiniMax = Min {4, 5, 7} = 4

NE = (4, 4)

Figure 2.4: Méthode de Minimax

Regardant ces deux choix de stratégie, nous voyons que le Maximin et Minimax estimés sont trouvés dans la même cellule de la table de jeu. Ainsi la stratégie de Maximin de Pierre est sa réponse la meilleure à MiniMax de Marie et vice versa; On a trouvé l'équilibre Nash de ce jeu.

Exemple 19. ***(Dilemme du prisonnier)***

L'équilibre de Nash est utile non seulement dans les jeux mais aussi dans les sciences sociales. Les dilemmes sont des modèles les plus importantes des problèmes sociales.

Imaginons qu'une femme et un homme coupables d'un délit sont arrêtés et interrogés séparément par la police.

Ils ont deux choix possible: Dénoncer ou Avouer le délit.

Confrontés à ce choix et sans possibilité de communiquer l'un avec l'autre, l'homme et la femme se rétrouvent à une situation que l'on appelle dilemme du prisonnier. Plus généralement, il s'agit d'une situation où chaque individu peut faire un choix entre une stratégie coopérative (avouer) et une stratégie trichant (dénoncer) oû chacun fait mieux pour avouer, indépendamment de ce que l'autre joueur fait.

Femme

		Avouer	Denoncer
Homme	Avouer	10,10	1,25
	Denoncer	25,1	3,3

Figure 2.5: Dilemme du prisonnier

Le résultat d'équilibre exige que les deux joueurs décident d'avouer et chacun passe 10 ans en prison. Si tous les deux avaient voulu dénoncer n'importe quelle participation, cependant, ils auraient été mieux avec seulement 3 ans en prison. On voit que l'équilibre de Nash de ce jeu n'est pas pareto efficace. Donc, l'existence d'un équilibre n'implique pas que celui-ci soit nécessairement optimal.

Imaginons que nous permettons l'homme et la femme de se communiquer, alors tous les deux décideront "dénoncer" qui est l'équilibre pareto-efficace. Mais, cette équilibre n'est pas stable. Parce que, dans ce cas, chacun d'eux désire de changer ses stratégies à "avouer" en croyant que l'autre jouerrait "dénoncer". Donc, ils reviennent à l'équilibre de Nash.

Exemple 20. ***(Jeux de coordinations)***

Les jeux de coordination représentent les jeux avec des équilibres de Nash multiples où les stratégies sont idéntiques. Dans ces jeux, deux structure de communication sont valables :

1) communication à sens unique
2) commnuication à double sens

Nous considérons qu'il y a deux types pricipales de jeux de coordination, l'un avec une stratégie coopérative ce que l'on appelle les jeux de pure coordination et l'autre dans lequel une stratégie est moins risqué par rapport à l'autre ce que l'on dit la bataille des sexes. On verrà la distinction plus clairement dans les exemples suivants[11].

Jeux de pure coordination

Imaginons que Martin et Quentin veulent faire une activité pour dimanche soir et il y a deux possibilité : ou ils vont au match de football ou bien il vont au match de basketball. Les récompenses de chacun sont comme suivant :

		Martin	
		Foot-ball	Basket-ball
Quentin	Foot-ball	15,15	0 , 0
	Basket-ball	0 , 0	2,2

Figure 2.6: Jeux de pure coordination

- S'ils vont au match de football, ses récompenses seront $(Football, Football) = (15, 15)$. Parce que, tous les deux préferent le match de football au match de basketball.
- Si tous les deux vont au match de basketball, ils seront contents mais, ses récompenses seront $(Basketball, Basketball) = (2, 2)$.
- S'ils vont des matchs différents, c'est le pire cas pour tous les deux $(Basketball, Football) = (Football, Basketball) = (0, 0)$.

Car, ils font ses choix sans communication, il apparaît deux équilibres de Nash de jeux, ou $(Football, Football)$ est l'équilibre Pareto dominant qui est la meilleure pour tous les deux et $(Basketball, Basketball)$ est l'équilibre moins favorable. Donc, ils veulent coordonner ses choix sur l'équilibre Pareto dominant.

Ce jeu est un exemle de jeu de pure coordination. C'est différent de dilemme du prisonnier de deux façons : premièrement, il n'y pas de stratégies dominantes dans les jeux de pure coordination et la communication peut faire une différence dans les jeux de pure coordination contrairement à la dilemme du prisonnier.

Si, par exemple, ils se téléphonent avant de sortir, ils s'accordent probablement pour aller au match de foot. Donc, nous voyons bien que dans les jeux de pure coordination la communication à double sens mène a l'équilibre Pareto dominant.

Bataille des sexes

La bataille des sexes est un jeu de coordination où les joueur veulent coordonnner sur les équilibres différents. Examinons le jeu suivant:

Henry et Audrey se décident d'aller au cinéma et il y a deux films qu'ils peuvent voir : Avatar et Reader.

Puisque Henry aime le science fiction il a tendance à préférer aller Avatar à Reader et réciproquement Audrey a tendence à préférer d'aller Reader à Avatar.

S'ils vont à voir Avatar la récompense sera $(Henry, Audrey) = (3, 1)$ et s'ils vont à voir Reader, la récompense sera $(Henry, Audrey) = (1, 3)$. Au cas oû ils vont des films différents, la récompense de chacun sera 0. Parce que tous les deux veulent voir le film ensemble.

		Audrey	
		Avatar	Reader
Henry	Avatar	3 , 1	0 , 0
	Reader	0 , 0	1 , 3

Figure 2.7: Bataille des sexes

Si nous les permettons de se communiquer, il s'agira d'une négation entre les deux qui ne mène pas toujours un accord parce qu'ils préferent les équilibres différentes. Dans ce cas, la communication à sens unique peut fonctionner. Par exemple, si Audrey dit qu'elle va certainement aller à Reader, Henry fait mieux d'accorder avec cette décision ou vice versa.

Exemple 21. ***(Duopole de Cournot)***

La duopole de Cournot est intéressante, parce qu'il y a deux entreprises qui rivalisent dans le même marché avec plusieus stratégies et que la duopole se trouve entre les deux cas extrêmes : la compétition parfaite et la monopole.

On l'examinera mieux dans l'exemple suivant :

Dans ce jeu, chaque entreprise choisit sa production indépendamment et le marché détermine le prix auquel il est vendu.

- Les joueurs : 2 entreprises (Nokia, Samsung)

- Les stratégies : les quantités d'un produit idéntique qu'ils produisent.
  q_1: quantité de Nokia, q_2: quantité de Samsung, $q = q_1 + q_2$: quantité totale. Notons que ces deux produit sont des substitut parfait.

- Le coût de production : cq ou q est la quantité totale et c est constante du coût marginale.

- Le prix : Soient a et b constants, on montre le prix de la manière suivante $p = a - b(q_1 + q_2)$
  Cette équation nous montre que plus ces entreprises produisent, moins les produits coûtent. Voyons sur le figure :

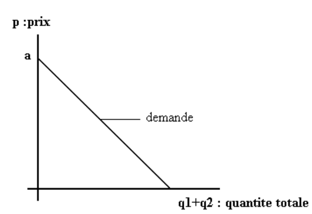

Figure 2.8: Prix-Production

- Les récompenses : les profits u_1, u_2.

  $u_1(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1$ et idéntiquement $u_2(q_1, q_2) = pq_2 - cq_2$
  Le but des entreprises est de maximiser ses profit.

Dans ce probleme, on va essayer de trouver la quantité de meilleure réponse de Samsung par rapport à chaque choix possible de Nokia, et vice versa. Apres on verrà où elles s'interséchent sur le dessin.

Premièrement, on remplace la fonction du prix p dans la fonction u_1 par $a - b(q_1 + q_2)$; on obtient: $u_1(q_1, q_2) = aq_1 - 2bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$

Afin de trouver le maximum nous la différentions par rapport à q_1 et la faisons équivalente à 0 : $a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0$

Redifférentiant, il devient $-2b < 0$ donc on trouve bien un maximum à la place d'un minimum. Alors $MR_1(q_2) = q_1^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_2}{2}$ et $MR_2(q_1) = q_2^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_1}{2}$ sont de meilleures réponses de Nokia et Samsung respectivement. Avant de décrire le figure, on trouve les points critiques :

$q_2 = 0 \Longrightarrow MR_1(0) = q_1^* = \frac{(a-c)}{2b}$ et $q_1^* = 0 \Longrightarrow \frac{(a-c)}{2} = q_2$ et c'est le même pour Samsung.

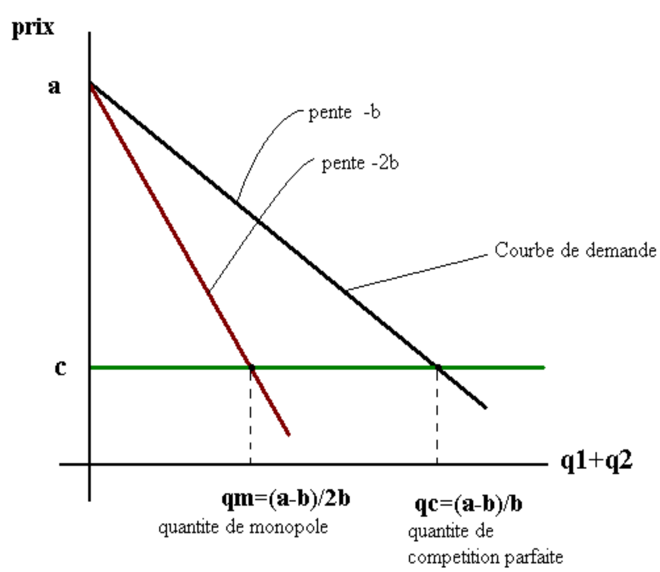

Figure 2.9: Prix-Production 2

Pour trouver où ces deux fonctions de meilleure réponse coincïdent, on résoudre l'égalité suivante : $MR_1(q_2) = MR_2(q_1)$

Nous trouvons $q_1^* = \frac{(a-c)}{b} - q_2^*$ et $q_2^* = \frac{(a-c)}{b} - q_1^*$, alors $q_1^* = \frac{(a-c)}{3b} = q_2^*$. On appelle cette quantité : La quantité de Cournot.

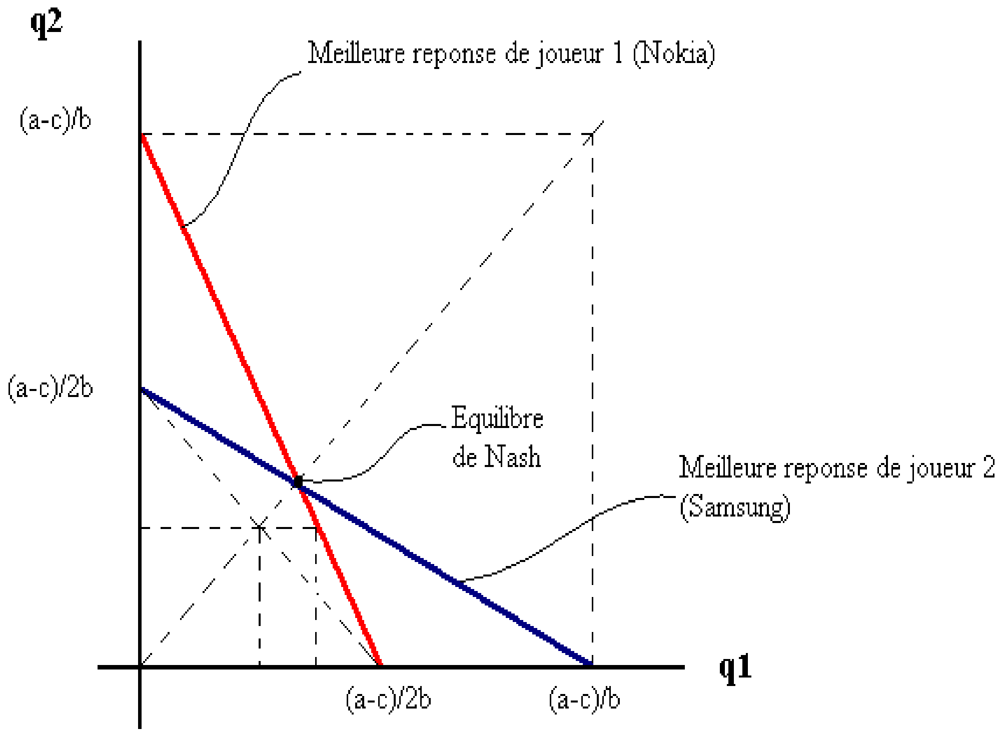

Figure 2.10: Duopole de Cournot

Qui se passe si l'on produit la moitié de la quantité de Monopole ? Signer un contrat pour produire le moitié de la quantité est illégal donc ils peuvent s'accordent sans un papier officiel. Dans ce cas, il y aura toujours un qui triche pour maximiser sa récompense et à la fin ils convergent au point d'équilibre de Nash. Si, autrement, ils produisent ses quantités competitives, alors les nouveaux entreprises vont entrer au marché.

Références

Articles
[1]DAVID K. LEVINE : *What is Game Theory?* Department of Economics, UCLA

[2]ADAM BRANDENBURGER : *Cooperative Game Theory: Characteristic Functions, Allocations, Marginal Contribution* Version 01/04/07

[3]J. VON NEUMANN et O.MORGENSTERN : *Theory of Games and Economic Behavior* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2nd ed., 1947 (first edition: 1944).

[4]MAGDALENA HYKSOVA : *Several Milestones in the History of Game Theory* Prague

[5]SEBASTIEN KONIECZNY : *Introduction à la Théorie des Jeux* Universite d'Artois - Lens

[6]TINNE HOFF KJELDSEN : *John von Neumann,Äôs Conception of the Minimax Theorem: A Journey Through Different Mathematical Contexts* Springer-Verlag 2001

[7] J. F. NASH JR. : *Equilibrium points in n-person games* Proc.Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950).

[8]JOHN F. NASH JR : *Non Cooperatif Games* The Annals of Mathematics, Second Series, Volume 54, Issue 2, Sept, 1951.

[9]CHARLES A. HOLT et ALVIN E. ROTH : *The Nash equilibrium: A perspective* Department of Economics, University of Virginia, Charlottesville, VA 22904-4182; and Department of Economics and Harvard BusinessSchool, Harvard University,

Cambridge, MA 02138

[10] AVINASH DIXIT et SUSAN SKEATH : *Games of Strategy* Second Edition 2004 , W:W Norton and Company,Inc.

[11] RUSSEL COOPER, DOUGLAS V. DEJONG, ROBERT FORSYTHE et THOMAS W. ROSS : *Communicatcation in Coordination Games* The Quarterly Journal of Economics,Vol.107, No.2 May,1992.

[12] BEN POLAK : *Game Theory* Open Yale Courses, ECON 159, Fall 2007.

MARTIN J. OSBORN : *An introduction to game theory* 2002/7/23, Chapter 2 :Nash Equilibrium: Theory

ERIC VAN DAMME : *John Nash and the Analysis of Rational Behavior* Tilburg University, April 2000.

JOHN F. NASH, Jr.: *The Bargaining Problem* Econometrica, Vol. 18, No. 2. (Apr., 1950), pp. 155-162.

MARTIN J. OSBORN : *An introduction to game theory* 2002/7/23, Chapter 2 :Nash Equilibrium: Theory