PROJET DE FIN D'ÉTUDES

pour obtenir le diplôme de

Université Galatasaray
Spécialité : **Mathématiques**
Directeur : **Susumu TANABE**

MÉCANIQUE NEWTONIENNE DU POINT DE VUE DE LA MÉCANIQUE LAGRANGIENNE

préparée par **Çiğdem AK**

Mai '12

REMERCIEMENTS

Je souhaite adresser me remerciment les plus sincères à mes proffeseurs : Susumu Tanabe, Meral Tosun et Muhammed Uludağ.

Ma directeur du projet M Tanabe, il a toujours eu le temps pour m'écouter ; je lui remercie pour le temps qu'il m'a consacré chaque semain au moins trois heures.

Mme Tosun, nous ont tous encadrés avec patience durant la réalisation de ce projet fin d'étude. Ses conseils nous ont été bien utiles, notamment pour la rédaction de ce mémoire.

M Uludağ, m'a su me motiver et me conseiller en me laissant libre de mes choix. Je lui remercie infiniment pour tous ses encouragements qui m'aident ne pas perdre l'envie des mathématiques.

Je remercie également, tout les professeurs de mon département pour tout qu'ils m'ont enseignés.

Je remercie bien sûr, ma famille et mes amis, qui m'ont soutenu et encouragé pendant ces quatre années et surtout pendant deux années dernières. Je vous suis très reconnaissant d'avoir toujours été là quand j'avais besoin de vous.

Table des Matières

INTRODUCTION

Sans doute, mécanique est l'une de sciences les plus anciennes. Elle était une partie des mathématiques jusqu'au 18ieme siècle. Maintenant elle est la base de la physique. Les problèmes dans la mécanique ont donné naissance à la géométrie analytique et à la théorie des équations différentielles.

On va étudier les trois cas spéciaux des équations différentielles qui s'appellent l'équation de Newton, l'équation d'Euler-Lagrange et les équations de Hamilton. Comme on verra, ces équations expriment le même contenu mathématique en trois manieres différentes. L'analyse de ces équations est une partie essentielle de la mécanique classique et donc la mécanique classique est un point important de croisement de mathématiques et de physique.

Dans le première chapitre, nous étudions la mécanique Newtonienne qui a été developpée dans les 18ième et 19ième siècles ; les nouvelles formulations ont apparu comme la mécanique Lagrangienne et la mécanique Hamiltonienne. Dans le deuxième chapitre on introduit le lagrangien et l'action. Par le calcul des variations on verra que les solutions de l'équation de Newton sont des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange. On verra que la solution de l'équation d'Euler-Lagrange réalise l'état extremal de l'action par le principe variationnel. Alors les solutions des équations de Newton sont l'extrémales de l'action.

On conclut que l'équation d'Euler-Lagrange est équivalente à l'équation de Hamilton à travers de la transformation de Legendre.

Mots-clés : Mécanique classique, équation d'Euler-Lagrange, calcul des variations, principe variationnel.

Chapitre 1

Mécanique Newtonienne

Un **mouvement** dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{x} : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longrightarrow & \boldsymbol{x}(t) \end{array}$$

qui est différentiable au moins deux fois. L'image du mouvement est appelé **trajectoire** ou **courbe** dans $\mathbb{R}^n$.

Notation : $\boldsymbol{x}(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$

Deux mouvements différents peuvent avoir la même trajectoire. Par exemple, les mouvements $\boldsymbol{x}=(x, y)$ tel que $x = cos(nt),\ y = sin(nt)$ et $n \in \mathbb{Z}$ ont tous la même trajectoire. Car $x^2 + y^2 = cos^2(nt) + sin^2(nt) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, qui est un circle.

Définition 1.0.1. *Soit $\boldsymbol{x}$ un mouvement.*

*La dérivé de $\boldsymbol{x}$ est le **vecteur vitesse** au point t_0 :*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}|_{t=t_0} = lim_{h\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(t_0 + h) - \boldsymbol{x}(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^N$$

*La deuxième dérivée de $\boldsymbol{x}$ est le **vecteur accélération** au point t_0 :*

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t_0) = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}\bigg|_{t=t_0}$$

Remarque 1.0.2. *Le vecteur vitesse $\dot{\boldsymbol{x}}$ est toujours tangent à la trajectoire du mouvement $\boldsymbol{x}$ puisque la première dérivée de $\boldsymbol{x}$ en un point est la pente*

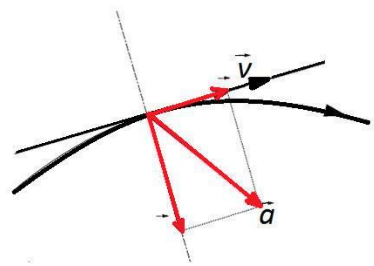


FIGURE 1.1 – Vecteur vitesse et accéleration

de la droite tangente de ce point. L'accélération peut avoir une composante tangente et une composante orthogonale. (Figure 1.1)

Tous les mouvements dans la nature sont détérminés par la position $\boldsymbol{x}(t_0)$ et la vitesse $\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)$ à un certain instant t_0. Cela est équivalent à dire que ces mouvements sont détérminés par une équation différentielle de 2ème ordre.

Définition 1.0.3. *Une* ***particule*** $(\boldsymbol{x}, m)$ *est un mouvement* $\boldsymbol{x}$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *avec la* ***masse****.* $m \in \mathbb{R}^+$ *qui est un constant indépendent de l'endroit où elle se trouve. On la fixe à 1.*

Notation. Une particule $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbb{R}^3$ est $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ et N particules dans $\mathbb{R}^n$ sont

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= (x_1^1, x_1^2, x_1^3) \\ \boldsymbol{x}_2 &= (x_2^1, x_2^2, x_2^3) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{x}_N &= (x_N^1, x_N^2, x_N^3) \end{aligned}$$

En général, c'est plus pratique de penser les mouvements des N particules dans $\mathbb{R}^3$ comme un seul mouvement dans $\mathbb{R}^{3N}$.

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 ..., \boldsymbol{x}_N)$$

$\mathbb{R}^{3N}$ est appelé **espace de configuration** du système de N points.

Equations de Newton

Deuxième loi de Newton. Un mouvement $\mathbf{x}$ est dit **physique** s'il existe une fonction $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$ telle que

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t) = \ddot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{1.0.1}$$

Définition 1.0.4. *L'équation (1.0.1) s'appelle* ***équation de Newton****.*

Pour une particule $\boldsymbol{x}_i$ où $i = 1, ..., N$ on a

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \mathbf{F}_i(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t).$$

Comme on sait qu'une équation différentielle ordinaire a une unique solution, il existe unique mouvement déterminé par $\boldsymbol{x}(t_0)$ et $\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)$.

1.1 Systèmes à un degré de Liberté

Un **système à un degré de liberté** est un système définit par une équation différentielle :

$$\ddot{x} = f(x), \; x \in \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

L'énergie cinétique est la forme quadratique :

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle est la fonction :

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi$$

L'énergie totale est une fonction $E(x, \dot{x})$ tel que

$$E = T + U$$

Théorème 1.1.1. ***(La loi de conservation de l'énergie)*** *Si les particules d'un système sont comme dans (1.1.1) alors l'énergie totale des particules est conservé. C'est à dire $E(x(t), \dot{x}(t))$ est indépendent de t.*

Démonstration. On veut montrer que $\dfrac{d}{dt}E = 0$. On a $E = T + U$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(T+U) &= \tfrac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)) \\
&= \dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} \\
&= \dot{x}(\ddot{x} + \frac{dU}{dx}) \\
&= \dot{x}(\ddot{x} - f(x)) = 0. \quad \textit{par} \quad (1.1.1)
\end{aligned}$$

□

1.1.1 Espace de Phase

L'équation $\ddot{x} = f(x)$ est équivalent au système des deux équations :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x) \tag{1.1.2}$$

Le plan avec les coordonnées x et y est appelé **espace de phase** de l'équation (1.1.2). Les points de l'espace de phase sont appelés **points de phase**.

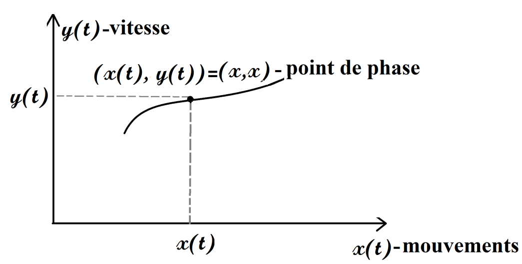


FIGURE 1.2 – Espace de phase

Une solution de (1.1.2) est un mouvement $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $x = \varphi(t), \quad y = \dot{\varphi}(t)$ qui est appelé **courbe de phase**. Comme y est la vitesse du point en mouvement, il est égale au ***vecteur vitesse de phase*** au point de phase car $y = \dot{\varphi}$.

Si le vecteur vitesse de phase et l'énergie potantielle en un point sont zéro alors ce point s'appelle la ***position d'équilibre*** de la courbe de phase.

La valeur de l'énergie totale est constante sur chaque courbe de phase par la loi de conservation de l'énergie totale. Grace à cela on peut trouver la courbe de phase.

Voyons tous qu'on a dit dans l'exemple suivant.

Exemple 1. ***(L'équation de la théorie d'oscillation)***

$\ddot{x} = -x$ est un système à un degré de liberté. Calculons T, U et E pour ce système.

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad U = \frac{x^2}{2} \Rightarrow E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Par la loi de conservation de l'énergie totale $\frac{d}{dt}E = 0$. C'est à dire E est constante.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) = x(\ddot{x} + x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} & = & -x \\ \dot{x} & = & 0 \quad \textit{(sans mouvement)} \end{cases}$$

Considérons le cas $\ddot{x} = -x$. Définissons $y := \dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

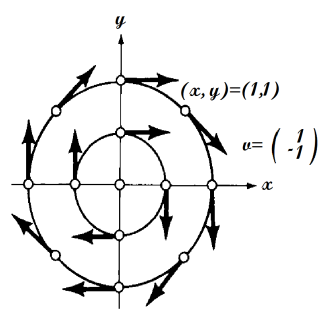


FIGURE 1.3 – Espace de phase de $\ddot{x} = -x$; $\boldsymbol{v}$: vecteur vitesse de phase

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}((x(t)^2 + y(t)^2) \tag{1.1.5}$$

Les courbes de phase sont des circles et l'origine par (1.1.5). Par (1.1.3), on voie que le vecteur vitesse de phase en point de phase (x, y) a des composants $(y, -x)$. On peut aussi déduire par (1.1.4) que les vecteurs vitesses de phase sont orthogonales du vecteur rayon et ont tous même grandeurs que le vecteur rayon, donc on a un mouvement uniforme autour de 0, dans l'espace de phase.

Par des équations ci-dessus on peut écrire les équations de mouvement :

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = r_0 \ cos(\varphi_0 - t) \\ y(t) = r_0 \ sin(\varphi_0 - t) \end{cases}$$

Trouvons $r_0, \ \varphi_0$ par les valeurs initiales :

$$\begin{aligned} E = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) &= \tfrac{1}{2}(y^2 + x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}((r_0 cos(\varphi_0 - 0))^2 + (r_0 \ sin(\varphi_0 - 0))^2) \\ &= \tfrac{1}{2} r_0^2 \end{aligned}$$

Comme en $t = 0$, $x_0 = r_0 cos\varphi_0$ et $x_0 = r_0 cos\varphi_0$, $E = \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2)$. Donc $x_0^2 + y_0^2 = r_0$.
On a $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ alors écrivons les équations de mouvement :

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{y_0^2 + x_0^2} \ cos\varphi_0 \\ y_0 = \sqrt{y_0^2 + x_0^2} \ sin\varphi_0 \end{cases}$$

Trouvons φ_0 aussi en terme des valeurs initiales :

$$\frac{y_0}{x_0} = tan(\varphi_0) \ alors \ \varphi_0 = Arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

Les équations de mouvement détérminées par les valeurs initiales de l'équation de la théorie d'oscillation sont

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} cos(\varphi_0 - t) \\ y(t) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} sin(\varphi_0 - t) \end{cases}$$

avec la position d'équilibre en (0,0). Cette exercice corresponds à l'evenement dans la figure (1.4). Aux points $-r_0$ et r_0, l'énergie cinétique est zéro, et au point 0, l'énergie potentielle est zéro.

1.2 Systèmes à deux degré de Liberté

Systèmes à deux degré de liberté est un système définit par l'équation différentielle :

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in E^2 \tag{1.2.1}$$

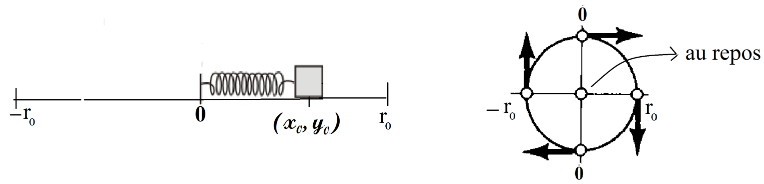


FIGURE 1.4 –

Définition 1.2.1. *Un système est* ***conservatif*** *s'il existe une fonction* $U : E^2 \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$f(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Alors l'équation de mouvement d'un système conservatif est de la forme :

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Théorème 1.2.2. ***(Conservation de l'énergie)***
L'énergie totale d'un système conservatif est conservé.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{E} = 0 \quad \textit{où} \quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 + U(\boldsymbol{x})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}} \\
&= -f(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}} \\
&= -\ddot{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Exemple 2. ***Un système conservatif***

$f(x, y) = (x, y)$ est un système conservatif parceque il existe un $U(x, y) = -xy$ tel que $-\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} = (x, y)$

Exemple 3. ***Un système non-conservatif***

Il n'existe pas une fonction $U(\boldsymbol{x})$ tel que

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = -f(\boldsymbol{x})$$

Par exemple $f(x,y) = (-y,x)$ n'est pas un système conservatif.

1.2.1 Espace de Phase

On peut écrire l'équation (1.2.1) comme :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = y_1, & \dot{x_2} = y_2 \\ \dot{y_1} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_1}, & \dot{y_2} = -\dfrac{\partial U}{x_2} \end{cases}$$

L'espace de phase d'un système à deux degré de liberté est l'espace de dimension quatre avec les coordonnées $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$. Alors l'énergie totale pour le système (1.2.1) dans l'espace de phase est

$$\mathbf{E} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2} + U(\boldsymbol{x}) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + U(x_1, x_2)$$

Exemple 4. ***(Petits oscillations d'une pendule sphérique)***

Soient $U = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ et

$$\ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -x_2. \tag{1.2.2}$$

Ce système des équations de mouvement est équivalent au système des équations :

$$\begin{array}{ll} \dot{x_1} = y_1, & x_2 = y_2 \\ \dot{y_1} = -x_1, & \dot{y_2} = -x_2 \end{array}$$

$E = \dfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ est constante, par la conservation de l'énergie totale. En utilisant ce résultat, on trouve les solutions du système (1.2.2). Donc les équations de mouvement sont

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 cos(t) + c_2 sin(t) \\ x_2 &= c_3 cos(t) + c_4 sin(t) \\ y_1 &= -c_1 sin(t) + c_2 cos(t) \\ y_2 &= -c_3 sin(t) + c_4 cos(t) \end{aligned}$$

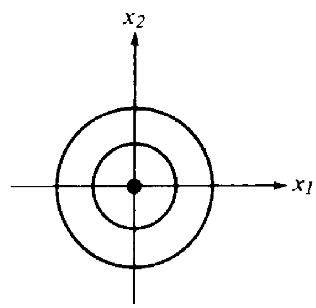


FIGURE 1.5 – Les courbes de niveau de l'énergie potentielle du système (1.2.2)

1.3 Champs de Forces Conservatives

Le travail d'une force constante **F** sur le chemin $\mathbf{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$ est le vecteur produit scalaire :

$$A = (\mathbf{F},\mathbf{S}) = |\mathbf{F}||\mathbf{S}|cos(\varphi)$$

Soient **F** un champs de vecteur, l la longueur d'une courbe finie.
Le travail du chemin de longueur l est :

$$A = lim_{\triangle \mathbf{S}_i \to 0} \sum (\mathbf{F}_i, \triangle S_i) = \int_l (\mathbf{F}, d\mathbf{S})$$

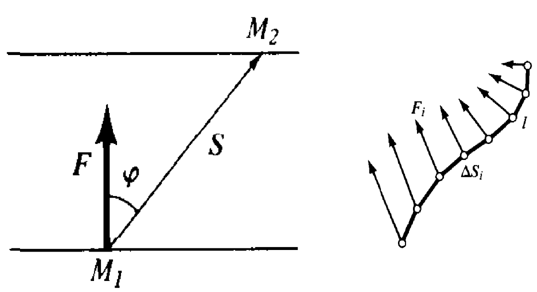


FIGURE 1.6 –

Ici, $\triangle S_i$ signifie les composantes de l et F_i est une valeur en un point particulièr de $\triangle S_i$. M_1 et M_2 signifient le point initial et terminal respectivement.

Définition 1.3.1. *Le champs $\boldsymbol{F}$ est coservatif si et seulement s'il existe l'énergie potentielle $U(\boldsymbol{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\boldsymbol{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}$.*

Théorème 1.3.2. *Un champs de vecteur $\boldsymbol{F}$ est conservatif si et seulement si son travail sur tout chemin, M_1M_2, dépend seulement des points initials et terminal du chemin et pas de la forme du chemin.*

Démonstration. Supposons que $\mathbf{F}$ soit un champs conservatif et U soit l'énergie potentielle. On a $\mathbf{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}$. Alors $\int_{M_0}^{M}(\mathbf{F}, d\mathbf{S}) = -U(M) + U(M_0)$. Donc le travail dépend seulement des points M et M_0.

Maintenant supposons que le travail d'un champs $\mathbf{F}$ ne dépend pas du chemin. Alors $U(M) - U(M_0) = -\int_{M_0}^{M}(\mathbf{F}, d\mathbf{S})$ est une fonction de M car $U(M_0)$ est un constant. On a $\mathbf{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}$. Donc F est conservatif. □

Exemple 5. *Montrer que le champs de vecteur $F_1 = x_2,\ F_2 = -x_1$ n'est pas conservatif.*

On a $\mathbf{F}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$. Soient c_1 et c_2 sont deux chemins tels que $c_1(t) = (cos(t), sin(t)),\ c_2(t) = (cos(t), -sin(t))$ et $0 < t < \pi$, (Figure 1.7). Si $\oint_{c_1(t)} \mathbf{F}dt = \oint_{c_2} \mathbf{F}dt$ alors F est conservatif. Maintenant calculons le travail de $\mathbf{F}$ sur deux chemins.

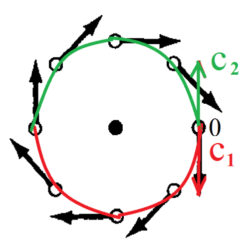


FIGURE 1.7 –

$$\begin{aligned}
\oint_{c_1} \mathbf{F} dS &= \int \mathbf{F}(c_1(t))\dot{c_1}(t)dt \\
&= \int (sin(t), -cos(t))(-sin(t), cos(t))dt \\
&= \int (-sin^2(t) - cos^2(t))dt \\
&= \int_0^\pi -1dt = -\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{c_2} \mathbf{F} dS &= \int \mathbf{F}(c_2(t)\dot{c_2}(t)dt \\
&= \int (-sin(t), -cos(t))(-sin(t), -cos(t))dt \\
&= \int (sin^2(t) + cos^2(t))dt \\
&= \int_0^\pi 1dt \\
&= \pi
\end{aligned}$$

On a $-\pi \neq \pi$ alors $\mathbf{F}$ n'est pas conservatif.

Exemple 6. *Considérons* $\boldsymbol{F}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$.
Est-ce que le champs de vecteur $\boldsymbol{F} - \{(0,0)\}$ *est conservatif ?*
Montrer que le champs de vecteur $\boldsymbol{F} - \{(0,0)\}$ *est conservatif si et seulement si le travail de* $\boldsymbol{F}$ *sur une courbe fermée est zéro.*

On a étudié $\mathbf{F}$ dans l'exemple précedent mais maintenant on n'a pas de $(0,0)$ car $F_{1,2}$ ne sont pas définis en $(0,0)$ alors $\mathbf{F} - \{(0,0)\}$ n'est pas conservatif.

Pour montrer la deuxième question, on peut intérpréter ce problème comme suivant aussi :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{z} = 2\pi i &= \int \frac{dx_1 + idx_2}{x_1 + ix_2}, \quad z = x_1 + ix_2 \\
&= \int \frac{(x_1 - ix_2)}{x_1^2 + x_2^2}(dx_1 + idx_2) \\
&= \int \frac{x_1dx_1 + x_2dx_2}{x_1^2 + x_2^2} + i\int \frac{(x_1dx_2 - x_2dx_1)}{x_1^2 + x_2^2} \\
&= Re\int \frac{dz}{z} + Im\int \frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

Considérons la partie réelle $Re\int \frac{dz}{z} = \frac{x_1dx_1 + x_2dx_2}{x_1^2 + x_2^2}$ alors on a $\mathbf{F} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)$.

Soient $c(t) = (cos(t), sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad et \quad x_1^2 + x_2^2 = r$. Alors $\mathbf{F} = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right)$, (Figure 1.8). Calculons le travail de $\mathbf{F}$:

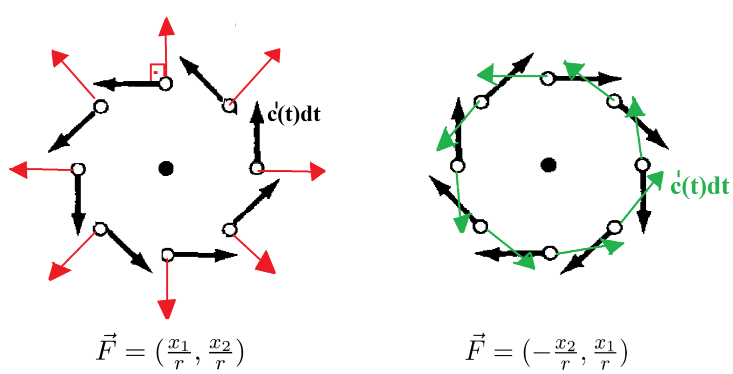


FIGURE 1.8 –

$$
\begin{aligned}
\int \mathbf{F} d\mathbf{S} &= \int < \mathbf{F}(c(t)), \dot{c}(t)dt > \\
&= \int < \mathbf{F}, \dot{c}(t) > \\
&= \int 0 = 0 \quad (\textit{le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est zéro})
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow Re \int \frac{dz}{z} = 0$$

Donc, le champs $\mathbf{F} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$ est conservatif ; en particulier si $\mathbf{F}$ est dans la forme $\mathbf{F}_{1,2} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)$, on a :

$$U = ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Maintenant considérons la partie complexe, $Im \int \frac{dz}{z} = \int \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$ alors on a $\mathbf{F} = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)$.

Calculons le travail de $\mathbf{F} = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r} \right)$ sur $c(t)$:

$$
\begin{aligned}
\oint_c \mathbf{F}\, d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(c(t))\dot{c}(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (sin(t), -cos(t))(-sin(t), cos(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} -(sin^2(t), cos^2(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} -1dt \\
&= -t|_0^{2\pi} = -2\pi
\end{aligned}
$$

Donc $Im \int \frac{dz}{z} = -2\pi \neq 0$, c'est à dire le travail sur une courbe fermée $c(t)$ n'est pas zéro alors $\mathbf{F} = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r} \right)$ n'est pas conservatif.

Exemple 7. *Soient $F(x_1 + ix_2) = (x_1 + ix_2)^2$ et $\mathcal{C}$ une courbe fermée tel que $\mathcal{C} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, (Figure 1.9). Est-ce que F est conservatif ? Calculer le travail sur $\mathcal{C}$.*

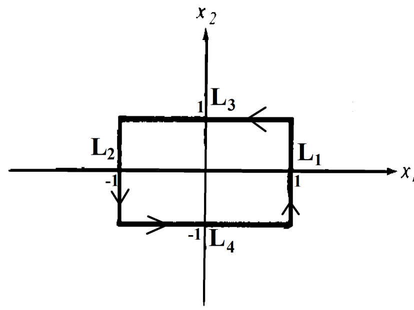


FIGURE 1.9 – Integration sur un rectangle

Le travail de **F** sur $\mathcal{C}$ est $\displaystyle\int FdS = \oint_{\mathcal{C}} (x_1^2 - x_2^2)dx_1 - \oint_{\mathcal{C}} 2x_1x_2dx_2 = 0$

$$\int_{L_1} (-2x_1x_2)dx_2 = \int_{-1}^{1} (-2.1.x_2)dx_2 = -x_2^2]_{-1}^{1} = 0$$
$$\int_{L_2} (-2x_1x_2)dx_2 = \int_{1}^{-1} (-2.(-1).x_2)dx_2 = x_2^2]_{1}^{-1} = 0$$
$$\int_{L_3} (x_1^2 - x_2^2)dx_1 = \int_{1}^{-1} (x_1^2 - 1)dx_1 = \frac{x_1^3}{3} - x_1]_{1}^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$
$$\int_{L_4} (x_1^2 - x_2^2)dx_1 = \int_{-1}^{1} (x_1^2 - 1)dx_1 = \frac{x_1^3}{3} - x_1]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Donc $\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} = 0$.

Remarquons on peut aussi calculer avec les relations $\int_{L_1} = -\int_{L_2}$ et $\int_{L_3} = -\int_{L_4}$.

Conclusion : Si $F(x_1 + ix_2) = f(x_1, x_2) + ig(x_1, x_2)$ est une fonction holomorphe (analytique complexe) en x_1+ix_2 alors $\oint_{\mathcal{C}}(f(x_1, x_2)+ig(x_1, x_2))d(x_1+ix_2)$ est zéro, où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée. C'est à dire

$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} f(x_1, x_2)dx_1 - g(x_1, x_2)dx_2}_{0} + i \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} g(x_1, x_2)dx_1 + f(x_1, x_2)dx_2}_{0} = 0$$

$\vec{F_1} = (f(x_1, x_2), -g(x_1, x_2))$ et $\vec{F_2} = (g(x_1, x_2), f(x_1, x_2))$ sont des forces conservatives. Par exemple, $(x_1^2 - x_2^2, -2x_1x_2)$ est conservatif comme on avait calculé dans l'exemple précedent.

Chapitre 2

Mécanique Lagrangienne

On va montrer que les mouvements d'un système potential Newtonien sont des extrêmes d'un principe variationnel. On va utiliser un espace coordonné de dimension n. On va noter un vecteur de cet espace comme

$$x = (x_1, ..., x_n),\ \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

2.1 Calcul des Variations

Définition 2.1.1. *Soit $C_{a,b} = \{\gamma : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^n | \gamma(t_a) = x_a, \gamma(t_b) = x_b\}$ l'ensemble des courbes. Un* ***fonctionnel****, I est une application tel que*

$$\begin{array}{rcl} I : C_{a,b} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \gamma & \mapsto & I(\gamma) \end{array}$$

Exemple 8. *La longueur d'une courbe est un fonctionnel.*

Soit γ une courbe telle que $\gamma(t_a) = x_a$ et $\gamma(t_b) = x_b$. I est un fonctionnel tel que $I(\gamma) = |x_b - x_a|^2$ est la longueur de la courbe γ.
Maintenant on veut définir la dérivée d'une fonctionnel I, mais on ne peut pas utiliser la définition standarde $lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de la dérivée comme $h \in \mathbb{R}$ car nous avons des fonctions (courbes) qui sont une collection infinie des nombres.

Alors on se souvient de la formule de Taylor, pour ε assez petit et $|h| < \varepsilon$:

$$f(x+h) = f(x) + f^{'}(x)h + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}h^2 + R_3 \quad lim_{h\to 0}\frac{R_3(h)}{h^2} = 0$$

On définit $F_x(h) := f'(x)h$ et $R_x(h) := \dfrac{f^{(2)}(x)}{2!}h^2 + R_3$.

Remarque 2.1.2. *$R_x(h) < c\varepsilon^2$ car R_n est ignorable et $\frac{f^{(2)}(x)}{2!}h^2 < c|h|^2 < c\varepsilon^2$.*

Définition 2.1.3. *On dit qu'un fonctionnel I est dérivable si l'on a pour ε assez petit $\forall\ h \in C_{a,b}$ tel que $|h| < \varepsilon$ et $|\dot{h}| < \varepsilon$:*

$$I(\gamma + h) - I(\gamma) = F_\gamma(h) + R_\gamma(h)$$

qui satisfait deux conditions suivantes :

(1) $F_\gamma(h)$ est un fonctionnel linéaire par rapport à h. C'est à dire
$F_\gamma(c_1h_1 + c_2h_2) = c_1F_\gamma(h_1) + c_2F_\gamma(h_2)$ tout $c_1,\ c_2\ \in\ \mathbb{R}$

(2) Il existe $c\ \in\ \mathbb{R}\quad |h| < \varepsilon\quad$ tel que $R_\gamma(h) < c\varepsilon^2$

Proposition 2.1.4. *Si le fonctionnel $F_\gamma(h)$ existe, il est unique et on l'appelle la **dérivée fonctionnelle** de I qui est aussi appelé la variation de I.*

Démonstration. Supposons qu'il y a deux dérivées fonctionnelles de I alors

$$I(\gamma) - I(\gamma + h) = F_\gamma(h) + R_\gamma(h) = F'_\gamma(h) + R'_\gamma(h)$$

Donc $F - F' = R' - R$.

Soit $|h| < \varepsilon$, $\forall\lambda \in]0,1[$, $|\lambda h| < \lambda\varepsilon$. $(F - F')_\gamma(\lambda h) = \lambda(F - F')_\gamma(h)$ par la définition (1).

$|(R - R')(\lambda h)| < |R'(\lambda h)| + |R(\lambda h)| < 2c\lambda^2\varepsilon^2$ par la définition (2).
Par les deux résultats on a juste obtenu, on a

$$\forall\lambda \in\ ]0,1[,\quad |(F - F')_\gamma(h)| < 2c\varepsilon^2\lambda \Leftrightarrow F - F' = 0$$

Donc pour tout h on a $F' = F$. □

2.2 Equation d'Euler-Lagrange

Définition 2.2.1. ***Lagrangien*** *est une application telle que*

$$\begin{array}{rcc} L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) & \mapsto & L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) \end{array}$$

*L'**action** est un fonctionnel tel que*

$$S(\gamma) = \int_{t_a}^{t_b} L(\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t), t)dt$$

Définition 2.2.2. *Un fonctionnel est **extrémal** sur une courbe si sa dérivée fonctionnelle en cette courbe est zéro. En d'autre terme, une courbe réalise l'extrême d'un fonctionnel si $F_\gamma = 0$.*

Notation : Pour une courbe $\gamma : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^n$, on va utiliser la notation $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) = x(t)$.

Considérons toutes les courbes (chemins) dans $C_{a,b}$ pour un système. Parmi tous les chemins possibles seulement un chemin est choisi par le système. Mais lequel ? Le théorème suivant nous le dit...

Théorème 2.2.3. ***(Principe Variationnel)*** *Le chemin choisi par le système est l'extremum de S si et seulement si l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite.*

C'est à dire l'action est extrémale (sur $x(t)$) si et seulemet si :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x_i} = 0 \qquad i\text{=}1,\ldots,n$$

On l'appelle l'**équation d'Euler-Lagrange**.

Démonstration. Soit l'action $S(x) = \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t)dt$. On veut montrer que la dérivée fonctionnelle de S est zéro si et seulement si l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite.

Calculons la dérivée fonctionnelle de S en utilisant la formule de Taylor. Soient $|h| < \varepsilon,\ \forall i\ |h^i| < \varepsilon$ et $|\dot{h}^i| < \varepsilon$ tel que $h = (h_1, ..., h_n)$.

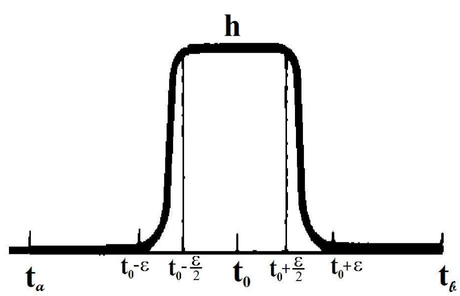
$$
\begin{aligned}
S(x+h)-S(x) &= \int_{t_a}^{t_b} L(x+h,\dot{x}+\dot{h},t)dt - \int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)dt \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial x_i}h_i + \int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{h}_i}_{F_x}\,dt + R_x(h)
\end{aligned}
$$

La deuxième partie R_x est plus petite que $c\varepsilon^2$ par (2.1.2). En plus, la première partie F_x est linéaire dans h. C'est à dire $F_x(h)$ est la dérivée fonctionnelle de S.
Si on fait l'integrale par partie, on obtient

$$
\begin{aligned}
F_x(h) &= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial x_i}h_i + \int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{h}_i dt \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right)h_i dt + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}h_i\right]_{t_a}^{t^b}
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

On a trouvé la dérivée fonctionnelle, F_x de S.

En particulier soit $h^i = 1$ sur $]t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + \frac{\varepsilon}{2}[$ et $h^i(t) = 0$ sur $\mathbb{R}\backslash]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. (Figure 2.2).



La deuxième partie de (2.2.1) est zéro car $h(t_a) = h(t_b) = 0$ et appelons la première partie de (2.2.1) $\displaystyle\int_{t_a}^{t_b} dt\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = f^i$. On va montrer que

$$
f^i = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \;\Leftrightarrow\; F_x(h) = 0 \;\forall h
$$

Si $f^i = 0 \ \forall i$ est zéro il est clair que $F_x(h)$ est zéro. Montrons la réciproque. Supposons que $f \neq 0$ c'est à dire après un changement propre de signe, il existe i, *tel que* $f^i(t) > 0$. Alors il existe un c tel que $\varepsilon > 0$, $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ $f(t) > c$. Il suit que $F_x(h) > c\varepsilon \neq 0$ pour h qu'on a choisit car

$$\int_{t_a}^{t_b} fhdt = \int_{t_a}^{t_0-\varepsilon} fhdt + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0-\frac{\varepsilon}{2}} fhdt + \int_{t_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{t_0+\frac{\varepsilon}{2}} fhdt + \int_{t_0+\frac{\varepsilon}{2}}^{t_0+\varepsilon} fhdt + \int_{t_0+\varepsilon}^{t_b} fhdt \tag{2.2.2}$$

Comme le premièr terme et le dérnier sont zéro, le deuxième terme et le cinquième terme sont plus grande que zéro et le troisiéme est plus grande que $c\varepsilon$ donc $\int_{t_a}^{t_b} fhdt > c\varepsilon$. Ceci contradit $F_x = 0$. Donc l'hypothèse $f > 0$ est fausse. On conclut que $f = 0$. Q.E.D. □

Théorème 2.2.4. *La solution de l'équation de Newton dans un système conservatif réalise l'action extrêmale* $\int_{t_a}^{t_b} Ldt$ *où* L *est le lagrangien tel que* $L = T - U$.

Démonstration. Soit $\vec{x}_i = (x_i^1, ..., x_i^j)$, $j = 1, ..., n$, $i = 1, ..., N$. On sait que pour un système conservatif il existe $U(x)$ tel que $F_i = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ et que l'équation de Newton est $F_i = \ddot{x}_i$ alors

$$\ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

Calculons l'équation d'Euler-Lagrange pour le lagrangien $T(\dot{x}) - U(x)$. On sait que $T(\dot{x}(t)) = \sum_{i=1}^N \dfrac{1}{2} \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i$. On a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\dot{x}_i^j} T(\dot{x})\right) - \frac{d}{dx_i^j} U(x) = 0$$

$$\ddot{\vec{x}}_i - \vec{F}_i = 0$$

Donc on voit que la solution de l'équation de Newton réalise l'action extrêmale. □

Exemple 9. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *quel est le chemin le plus court entre deux points ?*

Notons par l un chemin de t_1 à t_2. On cherche le plus court chemin. Comme la longueur est un fonctionnel, nous pouvons utiliser le calcul variationnel pour ce problème. D'abord on va montrer que ce fonctionnel est une action S pour un lagrangien L.

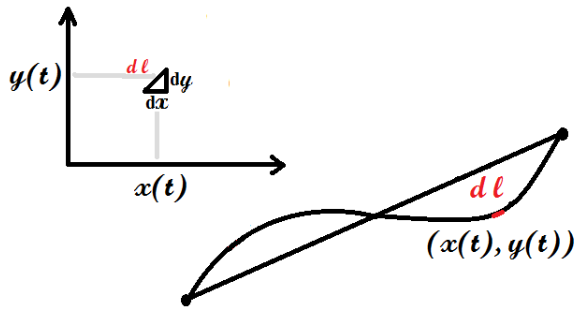


FIGURE 2.1 – Les routes entre deux point

Quand t change petit à petit, x bouge $\frac{dx}{dt}$. On sait que $dx = \frac{dx}{dt}dt$. Par le théorème de Pythagore (Figure 2.1) on trouve que

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left(\frac{d}{dt}x + \frac{d}{dt}y\right)^2 dt^2 \\ \int d\ell &= \int dt\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = S \end{aligned}$$

La longueur S est donc une action. Pour trouver le minimum, calculons les deux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Et donc $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})\right) = 0 \end{cases}$ il suit $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{x}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0 \end{cases}$

Comme les dérivées de ces équations sont zéros on obtient $\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1$ et $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2$ où c_1, c_2 sont des constants. En les dérivant on a $\dot{x} = c_3\dot{y}$. Par l'integration on trouve $x = c_3 y + c_1$. Donc c'est une équation d'une droite.

Exemple 10. *Dans $\mathbb{R}^3$, Si une courbe tourne autour de l'axe y, on obtient une surface. Pour quelle courbe cette surface a l'aire minimal ?*

L'aire correspondant à la revolution d'une partie infinitésimal de la courbe de longueur $d\ell$ est $2\pi x(t)d\ell$. Donc l'aire total est $2\pi\int x(t)d\ell$. (Figure 2.2). Donc l'action est

$$S = 2\pi \int dt x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

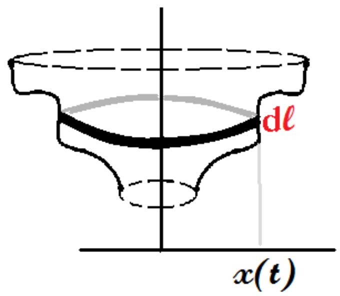


Figure 2.2 – L'aire minimale

On calcule les équations d'Euler-Lagrange par rapport à x on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}x(t)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}x(t) = 0$$

Cela est equivalent à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) - \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$

Comme cette équation est difficile à resoudre, regardons à l'autre équation Euler Lagrange, par rapport à y :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}x(t)\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0$$

Par intégration on obtient : :

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = c$$

Calculons maintenant $x(y),\ y(x)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}^2 x^2 = c^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \quad &\Rightarrow \quad (x^2-c^2)\dot{y}^2 = c^2\dot{x}^2 \\
&\Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{c\dot{x}}{\sqrt{x^2-c^2}} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c}{x^2-c^2} \\
&\Rightarrow \quad y(x) = \int \frac{cdx}{\sqrt{x^2-c^2}} \\
&\Rightarrow \quad y(x) = \operatorname{arccosh}(\frac{x}{c}) + d \\
&\Rightarrow \quad x(y) = c\cosh(\frac{y-d}{c})
\end{aligned}
$$

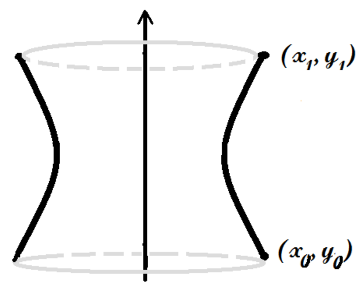


FIGURE 2.3 – L'aire minimale

Définition 2.2.5. *Une coordonnée est appelée* ***cyclique*** *si* $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$.

Exemple 11.

Soit le lagrangien $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$; on a $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$ et donc la coordonée x est cyclique.

Définition 2.2.6. *L'impulsion associée à une coordonnée x est $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.*

Exemple 12.

Soit le lagrangien $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, dans ce cas l'impulsion associée à x est

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Proposition 2.2.7. *L'impulsion associée à une coordonnée cyclique est un grandeur conservatif.*

Démonstration. Comme les mouvements physique sont des solutions des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Comme pour une coordonée cyclique $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$. L'impulsion associée est $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$. C'est à dire que $\frac{d}{dt}p = 0$; p est une constante et une grandeur conservative. □

2.3 Transformation de Legendre

Transformation de Legendre sert à trouver une fonction de la position x_i et l'impulsion p_i et qui est équivalente au lagrangien $L(x_i, \dot{x}_i, t)$.

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et f une fonction de x tel que $det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0$. On définit

$$\vec{p} = \frac{\partial f(x)}{\partial \vec{x}} \ \textit{où}\ p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

On sait qu'il existe des fonctions $\tilde{\vec{x}}(p)$ par le théorème des fonctions implicites tel que

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x^i} = \tilde{x^i}(p)$$

La transformation de Legendre de f est une fonction $g(p)$ tel que

$$g(p) = \sum_i p_i x^i(p) - f(x(p))$$

Exemple 13.

Soit $f(x) = m\frac{x^2}{2} + bx$. Cherchons la transformation de Legendre de f. Premièrement calculons p et $x(p)$.

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = mx + b \ et\ x(p) = \frac{p-b}{m}$$

La transformation de Legendre de f est

$$\begin{aligned} g(p) &= p\ x(p) - f(x(p)) \\ &= p(\tfrac{p-b}{m}) - \tfrac{m}{2}(\tfrac{p-b}{m})^2 - b(\tfrac{p-b}{m}) \\ &= \tfrac{(p-b)^2}{2m} \end{aligned}$$

2.3.1 Equations de Hamilton

Le lagrangien $L(x_i, \dot{x_i}, t)$ est une fonction de x_i et $\dot{x_i}$. On définit le Hamiltonien comme la transformation de Legendre du lagrangien par rapport à $\dot{x_i}$.

$$H(x_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{x_i} - L(x_i, \dot{x_i}, t) \text{ où } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}} = p_i(x_j, \dot{x_j}, t) \qquad (2.3.1)$$

Théorème 2.3.1. *Le système de l'équation de Lagrange est équivalent au sytème des équations de Hamilton qui sont*

$$\begin{aligned} \dot{p_i} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dot{x_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

où H est le Hamiltonien.

Démonstration. Considérons la dérivé de H

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=0}^{n}\left[(dp_i\dot{x_i} + p_i d\dot{x_i}) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}d\dot{x_i} + \frac{\partial L}{\partial t}dt\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(dp_i\dot{x_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}dx_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \end{aligned}$$

et on sait que $H = H(x_i, p_i, t)$ alors

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

Comme les deux dernières équations sont équivalentes et on sait que $\dot{p_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}$ par (2.3.1), on peut déduire les équations suivantes.

$$\begin{aligned} \dot{p_i} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dot{x_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Ces équations sont des équations de Hamilton.

$\square$

Exemple 14.

Pour un système conservatif le lagrangien est donné comme

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

Calculons le Hamiltonien. Comme $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, on a $\dot{x} = \dfrac{p}{m}$

$$\begin{aligned} H &= m\dot{x}\frac{p}{m} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) \\ &= p\frac{p}{m} - \frac{m}{2}(\frac{p}{m})^2 + U(x) \\ &= \frac{p^2}{2m} + U(x) \end{aligned}$$

Remplaçons p par $m\dot{x}$. On obtient le Hamiltonien suivant,

$$H(p(\dot{x}), x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

On peut en déduire que Hamiltonien est l'énergie totale.

Corollaire 2.3.2. *Les équations d'Euler-Lagrange sont équivalentes aux équations de Hamilton,* $\dot{\boldsymbol{p}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$, $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$ *où* $\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_n)$ *et* $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$.

Exemple 15. *Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange pour le lagrangien* $L = \frac{m}{2}x^2 - U(x)$ *sont équivalents aux équations de Hamilton* $H = \dfrac{p^2}{2m} + U(x)$.

Le calcul d'équation Euler-Lagrange pour $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$ donne

$$m\ddot{x} + \frac{d}{dx}U(x) = 0 \tag{2.3.2}$$

Maintenant calculons l'équation de Hamilton $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\left(0 + \dfrac{d}{dx}U(x)\right)$ c'est à dire $\dot{p} + \dfrac{d}{dt}U(x) = 0$ et $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m}$ alors $p = m\dot{x}$ donc $\dot{p} = mx$. Remplaçons $\dot{p}$ dans l'équation prècedente on obtient $m\ddot{x} + \dfrac{d}{dx}U(x) = 0$ qui est exactement l'équation d'Euler-Lagrange donné dans (2.3.2).

2.4 Lois de Conservation

Les lois de conservation sont souvent plus simple à voir dans la formalisme de Hamilton. En effet :

(1) Si $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ (si t est cyclique dans H) alors l'énergie totale est conservée comme $H = T + U$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_i}\dot{x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= -\dot{p_i}\dot{x_i} + \dot{x_i}\dot{p_i} + \tfrac{\partial H}{\partial t} \\
&= \frac{\partial H}{\partial t}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{dH}{dt}$ est zéro. Alors l'énergie totale est conservée.
(2) Si x est cyclique dans le lagrangien alors x n'apparaît pas dans le Hamiltonien alors p_x est conservée.

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

.

Bibliographie

[1] ARNOLD V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics,* Springer-Verlag, Second Edition, 1989.

[2] AK Ç., V. d. BLEEKEN D., KASPI I., *Notes de cours "Mécanique Analytique" donné à l'Université Galatasaray, Automne 2011.*