Beyân-ı Kâide-i Cedîde:

Bir Osmanlı Subayının Gräffe Yöntemine Yorumu

Dr. Zehra Bilgin

FSM Vakıf Üniversitesi

Bilim Tarihi Bölümü

Viyana’da Matematikçi Bir Subay:

Hamdi Efendi ve Beyân-ı Kâide-i Cedîde

Elif Baga - Zehra Bilgin

TÜBA Yayınları, 2022.

Akış

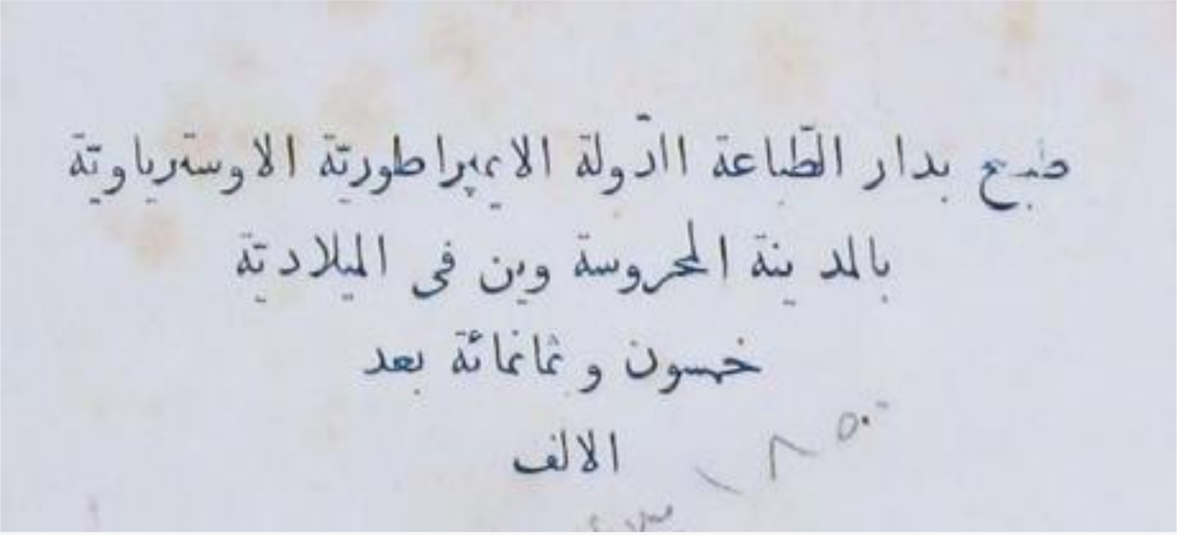
- Hamdi Efendi
- Beyân-ı Kaide-i Cedîde
- Karl Heinrich Gräffe
- Hamdi Efendi’nin yorumu
- İleri Sorular

Hamdi Efendi

- Mekteb-i Harbiye ve yurt dışına gönderilen öğrenciler
- Hamdi Efendi’nin hayatı hakkında bilinenler
- Viyana’daki eğitimi ve eseri

Beyân-ı Kâide-i Cedîde

- **1850 yılında Viyana’da basıldı.**
- **46 Sayfa.**
- **Gräffe yöntemini açıklıyor.**

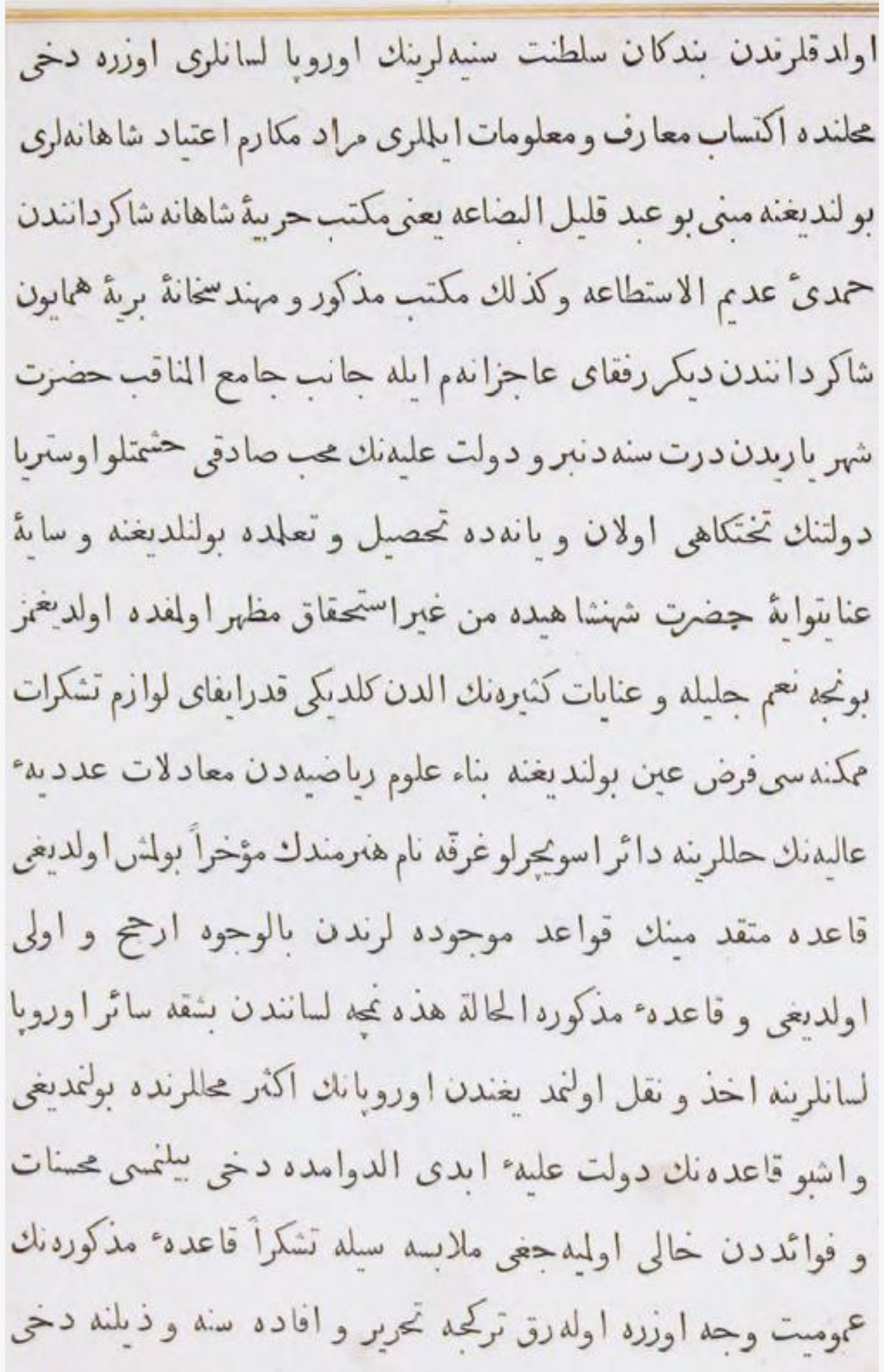


طبع بدار الطباعة الدولة الايمپراطورية الاوستريا وية
بالمدينة المحروسة وين في الميلادية
خمسون وثمانمائة بعد
الالف

Viyana Büyükşehrinde Avusturya İmparatorluğu Devlet Matbaası’nda miladi 1850 yılında basılmıştır.

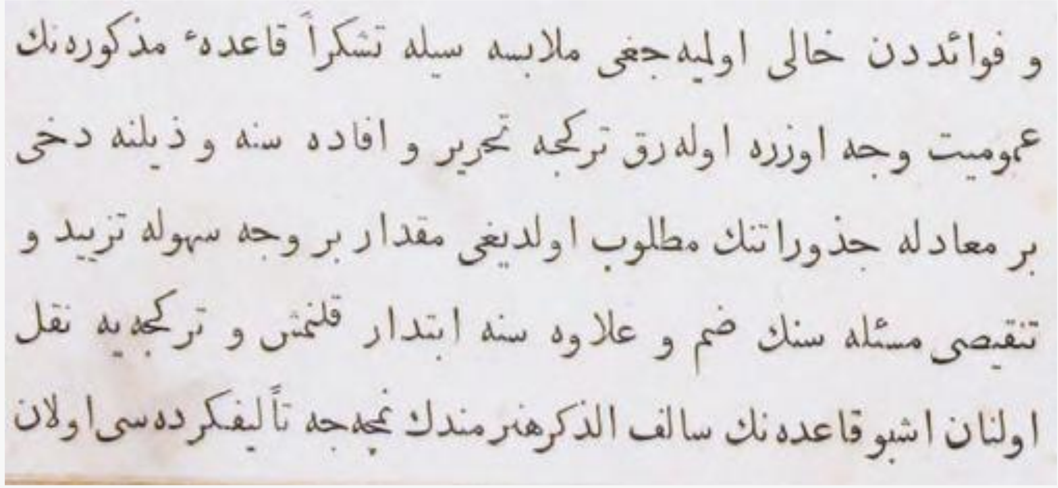
Eserin Yazım Sebebi

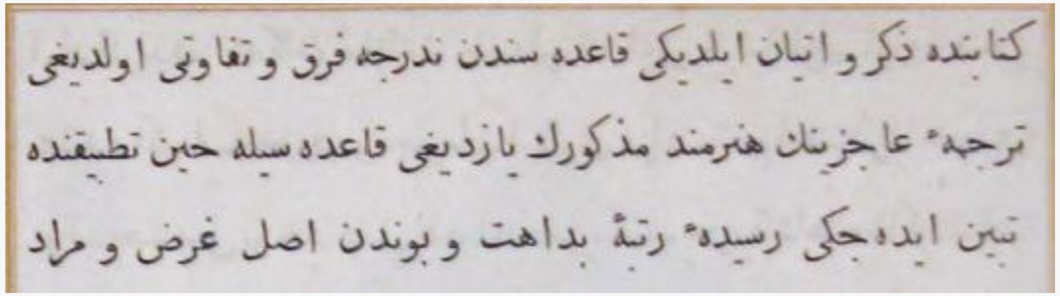
… padişahımız ilimlere yatırım yaptığından ve her ne kadar ülkemizde her türlü yüksek ilim ve fen tahsil olunmakta ise de **Avrupalılar medeniyetleri sebebiyle çeşitli ilimlerde ilerlemiş olduklarından Sultanımızın bizlerin hem bu ilimleri hem de Avrupa dillerini yerinde öğrenmemize dair isteğine binaen** ben Mekteb-i Harbiye öğrencilerinden Hamdi kendi okulumdan ve Mühendishane’den arkadaşlarımla dört seneden beri Avusturya’nın başkenti **Viyana’da tahsil görüyoruz**. **Padişahımız sayesinde mazhar olduğumuz bunca nimet ve yardıma elden geldiği kadar teşekkür etmek farz oldu.** Yüksek dereceli denklemlerin çözümüne dair İsviçreli Graffe adlı hünermendin bulduğu yöntem, önceki yöntemlerden daha iyi olduğundan ve halihazırda Nemçe dilinden başka Avrupa dillerine çevrilmediğinden Avrupa’nın çoğu yerinde bilinmemektedir. **Bu yöntemin Devlet-i Aliye’de bilinmesinin iyi ve faydalı olduğunu düşünerek** Türkçe tahrir ve ifadesine…


اوادقلرندن بندکان سلطنت سنیه‌لرینك اوروپا لسانلری اوزره دخی
محلنده اکتساب معارف و معلومات ایلملری مراد مکارم اعتیاد شاهانه‌لری
بولندیغنه مبنی بو عبد قلیل البضاعه یعنی مکتب حربیهٔ شاهانه شاکردانندن
حمدئ عدیم الاستطاعه وکذلك مکتب مذکور و مهندسخانهٔ بریهٔ همایون
شاکردانندن دیکر رفقای عاجزانه‌م ایله جانب جامع المناقب حضرت
شهریاریدن درت سنه‌دنبرو دولت علیه‌نك محب صادقی حشمتلو اوستریا
دولتنك تختکاهی اولان ویانه‌ده تحصیل و تعلمده بولنلدیغنه و سایهٔ
عنایتوایهٔ حضرت شهنشاهیده من غیر استحقاق مظهر اولمقده اولدیغمز
بونجه نعم جلیله و عنایات کثیره‌نك الدن کلدیکی قدر ایفای لوازم تشکرات
ذمکنه‌سی فرض عین بولندیغنه بناء علوم ریاضیه‌دن معادلات عددیهٔ
عالیه‌نك حللرینه دائر اسویچرلو غرفه نام هنرمندك مؤخراً بولمش اولدیغی
قاعده متقدمینك قواعد موجوده‌لرندن بالوجوه ارجح و اولی
اولدیغی و قاعدهٔ مذکوره الحالة هذه نمچه لساندن بشقه سائر اوروپا
لسانلرینه اخذ و نقل اولنمدیغندن اوروپانك اکثر محللرنده بولنمدیغی
واشبو قاعده‌نك دولت علیهٔ ابدی الدوامده دخی بیلنمسی محسنات
و فوائددن خالی اولمیه‌جغی ملابسه‌سیله تشکراً قاعدهٔ مذکوره‌نك
عمومیت وجه اوزره اوله‌رق ترکجه تحریر و افاده سنه و ذیلنه دخی

Eserin Yazım Şekli

zikri geçen kaide **genel bir yöntemle** Türkçe **tahrir** (yazım) ve **ifade** (anlatma, beyan) ve **zeyl** (ek, kitap sonuna sonradan ilave olunan kısım) edilmiştir. Aynı zamanda, bir polinomun değişkenini arttırma ve eksiltme yoluyla köklerine kolaylıkla ulaşma meselesine **ilave** bir kısım eklenmiştir. Türkçeye çevrilen **bu kaidenin Gräffe'nin** Nemçece telifinde zikrettiği ve beyan eylediği **kaidesinden ne derece farklı olduğu** bu tercüme ile zikri geçen hünermendin yazdığı kaide karşılaştırıldığında ortaya çıkacağı delile ihtiyaç duymayacak derecede açıktır.


و فوائددن خالی اولمیه‌جغی ملابسه سیله تشکراً قاعدهٔ مذکوره‌نك
عمومیت وجه اوزره اوله‌رق ترکجه تحریر و افاده سنه و ذیلنه دخی
بر معادله جذوراتنك مطلوب اولدیغی مقدار بر وجه سهوله تزیید و
تنقیصی مسئله سنك ضم و علاوه سنه ابتدار قلنمش و ترکجه‌یه نقل
اولنان اشبو قاعده‌نك سالف الذکر هنرمندك نمچه‌جه تألیفکرده‌سی اولان


کتابنده ذکر و اتیان ایلدیکی قاعده سندن نه درجه فرق و تفاوتی اولدیغی
ترجمهٔ عاجزینك هنرمند مذکورك یازدیغی قاعده سیله حین تطبیقنده
تبین ایده‌جکی رسیدهٔ رتبهٔ بداهت و بوندن اصل غرض و مراد

Karl Heinrich Gräffe

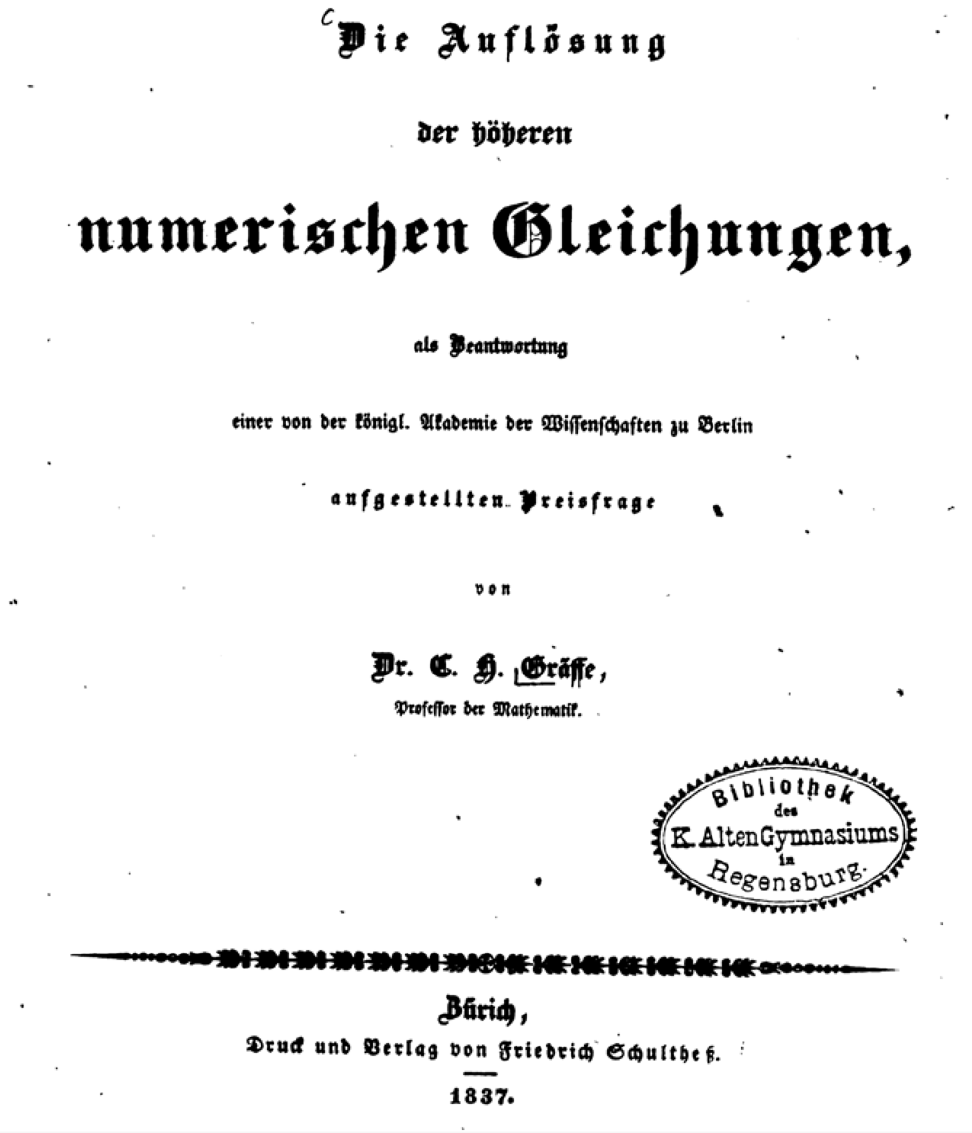
- Almanya, Brusnwick, 1799
- Göttingen Üniversitesi, Doktora, 1825

  Die Geschichte der Variationsrechnung vom Ursprung der Differential und Integralrechnung bis auf die heutige Zeit zu schreiben

- Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, 1837

- Zürich Üniversitesi, Profesör, 1860

Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen


Die Auflösung

der höheren

numerischen Gleichungen,

als Beantwortung

einer von der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin

aufgestellten Preisfrage

von

Dr. C. H. Gräffe,

Professor der Mathematik.

Zürich,

Druck und Verlag von Friedrich Schultheß.

1837.

Gräffe Yöntemi

$$bx^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

$\boldsymbol{x = \sqrt{y}}$

$$by^{\frac{n}{2}} + b_1y^{\frac{n-1}{2}} + b_2y^{\frac{n-3}{2}} + \ldots + b_{n-1}y^{\frac{1}{2}} + b_n = 0$$

$\boldsymbol{n}$ çift ise

$$by^{\frac{n}{2}} + b_2y^{\frac{n-2}{2}} + b_4y^{\frac{n-4}{2}} + \ldots + b_{n-2}y + b_n = -\sqrt{y}\left(b_1y^{\frac{n-2}{2}} + b_3y^{\frac{n-4}{2}} + b_5y^{\frac{n-6}{2}} + \ldots + b_{n-1}\right)$$

$\boldsymbol{n}$ tek ise

$$\sqrt{y}\left(by^{\frac{n-1}{2}} + b_2y^{\frac{n-3}{2}} + b_4y^{\frac{n-5}{2}} + \ldots + b_{n-1}\right) = -\left(b_1y^{\frac{n-1}{2}} + b_3y^{\frac{n-3}{2}} + \ldots + b_n\right)$$

$$y^n - (b_1 - 2b_2)y^{n-1} + \left({b_2}^2 - 2b_1b_3 + 2b_4\right)y^{n-2} - \ldots \pm {b_n}^2 = 0$$

Denkleminin kökleri ilk denklemin köklerinin kareleridir.

Bu işlem tekrarlandığında,

$$h(x) = 0 \;\; h(x_2) = 0, h(x_4) = 0, \ldots, h(x_m) = 0, h(x_{2m}) = 0$$

denklemleri elde edilir.

$$c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > c_n$$

İlk denklemin kökleri olsun.

$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ $\quad$ $h(x_m) = 0$ denkleminin katsayıları

$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ $\quad$ $h(x_{2m}) = 0$ denkleminin katsayıları

$$\begin{aligned}
k_1 &= {c_1}^m + {c_2}^m + {c_3}^m + \ldots + {c_n}^m \\
k_2 &= {c_1}^m {c_2}^m + {c_1}^m {c_3}^m + \ldots + {c_{n-1}}^m {c_n}^m \\
&\vdots \\
k_n &= {c_1}^m {c_2}^m {c_3}^m \ldots {c_n}^m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_1 &= {c_1}^{2m} + {c_2}^{2m} + {c_3}^{2m} + \ldots + {c_n}^{2m} \\
t_2 &= {c_1}^{2m} {c_2}^{2m} + {c_1}^{2m} {c_3}^{2m} + \ldots + {c_{n-1}}^{2m} {c_n}^{2m} \\
&\vdots \\
t_n &= {c_1}^{2m} {c_2}^{2m} {c_3}^{2m} \ldots {c_n}^{2m}
\end{aligned}$$

Yeterince büyük m için

$$
\begin{aligned}
k_1 &= {c_1}^m \\
k_2 &= {c_1}^m {c_2}^m \\
k_3 &= {c_1}^m {c_2}^m {c_3}^m \\
&\vdots \\
k_r &= {c_1}^m {c_2}^m {c_3}^m \ldots {c_{r-1}}^m {c_r}^m \\
&\vdots \\
k_n &= {c_1}^m {c_2}^m {c_3}^m \ldots {c_r}^m \ldots {c_n}^m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1 &= {c_1}^{2m} = {k_1}^2 \\
t_2 &= {c_1}^{2m} {c_2}^{2m} = {k_2}^2 \\
t_3 &= {c_1}^{2m} {c_2}^{2m} {c_3}^{2m} = {k_3}^2 \\
&\vdots \\
t_r &= {c_1}^{2m} {c_2}^{2m} {c_3}^{2m} \ldots {c_{r-1}}^{2m} {c_r}^{2m} = {k_r}^2 \\
&\vdots \\
t_n &= {c_1}^{2m} {c_2}^{2m} {c_3}^{2m} \ldots {c_r}^{2m} \ldots {c_n}^{2m} = {k_n}^2
\end{aligned}
$$

$c_1 = \sqrt[2m]{t_1}$ olmak üzere her $2 \le i \le n$ için

$$c_i = \sqrt[2m]{\frac{t_i}{t_{i-1}}}$$

Tekrarlı köklerin bulunması

Denklemin köklerinden c_r nin a defa tekrar ettiği varsayılsın.

$$c_1 >\ldots> c_{r-1} > c_r = c_{r+1} = c_{r+2} =\ldots= c_{r+a-1} > c_{r+a} >\ldots> c_n$$

$h(x_m) = 0$ ve $h(x_{2m}) = 0$ denklemlerinin katsayıları

$$k_r = ac_1{}^m c_2{}^m \ldots c_{r-1}{}^m c_r{}^m \qquad t_r = ac_1{}^{2m} c_2{}^{2m} \ldots c_{r-1}{}^{2m} c_r{}^{2m} = ak_r{}^2$$

$$k_{r+a-1} = c_1{}^m c_2{}^m \ldots c_{r-1}{}^m c_r{}^{am} \qquad t_{r+a-1} = c_1{}^{2m} c_2{}^{2m} \ldots c_{r-1}{}^{2m} c_r{}^{2am} = k_{r+a-1}{}^2$$

$$c_r = \sqrt[2am]{\frac{t_{r+a-1}}{t_{r-1}}}$$

Karmaşık köklerin bulunması

Karmaşık kökleri bulmak için de benzer yöntemler izlenir.

Bu şekilde köklerin modulusleri bulunur.

Kökleri bulmak için ilk denklemde değişken dönüşümü ile ikinci bir denklem elde edilir.

Bu denkleme de aynı yöntem uygulanarak modulusleri bulunur.

$$h(x) = 0 \qquad s_i = \sqrt{{l_i}^2 + {d_i}^2}$$

$$h(y - z) = 0 \qquad f_i = \sqrt{(z + l_i)^2 + d_i^2}$$

Örnek

$$4x^4 + 29x^3 - 44x^2 - 145x + 120 = 0$$

$$h(x) = x^4 + 7.25x^3 - 11x^2 - 36.25x + 30 = 0$$

$$v(x) = x^4 - 74.5625x^3 + 706.625x^2 - 1974.0625x + 900 = 0$$

$v(x)$ in kökleri $h(x)$ in köklerinin kareleridir.

Denklemin katsayıları:

$$b_1 = -74.5625, b_2 = 706.625, b_3 = -1974.0625, b_4 = 900$$

İkinci denklemin katsayıları:

$$b_1 = -4146.316, b_2 = 206737, b_3 = -2624996, \; log\, b_4 = 5.9084850$$

Üçüncü denklemin katsayıları:

$$b_1 = -16778466, b_2 = 2097370 \times 10^4, b_3 = -6555696 \times 10^6, \; log\, b_4 = 11.8169700$$

Dördüncü denklemin katsayıları	Beşinci denklemin katsayıları
$b_1 = -2814748 \times 10^8$	$b_1 = -7922816 \times 10^{22}$
$b_2 = 2199076 \times 10^{14}$	$b_2 = 2417852 \times 10^{34}$
$b_3 = -4294858 \times 10^{19}$	$b_3 = -1844674 \times 10^{45}$
$log\, b_4 = 23.6339400$	$log\, b_4 = 47.2678800$

Altıncı denklemde $b_2 = 2923003 \times 10^{74}$

Yedinci denklemde $b_2 = 4271974 \times 10^{154}$

b_2 hariç katsayılar kare olarak artıyor. b_2 nin yarısı kare olarak artıyor.

→ İkinci kök iki defa tekrar ediyor.

$$c_1 = -8, c_2 = 2.23606, c_3 = -2.23606, c_4 = 0.75$$

Gräffe'nin metninden farklılıklar

K. H. Gräffe

1. Reel ve karmaşık kök ayrımı yapılmamıştır.
2. Köklerin sadece 2, 3, ve 4 kez tekrar ettiği durumlarla yetinilmiştir.
3. Karmaşık kökler ayrıca incelenmediğinden bazı hususiyetler atlanmıştır.

Hamdi Efendi

1. Farklı ve tekrarlı kökler reel ve karmaşık olarak ayrılarak incelenmiştir.
2. Köklerin herhangi bir sayıda tekrar ettiği kabul edilmiş ve genel çözüm gösterilmiştir.
3. Karmaşık kökler için yöntem uygulandığında modulusler bulunduğu vurgulanıp sonra köklerin nasıl bulunduğu anlatılmıştır.

Gräffe’nin metninden farklılıklar

Hamdi Efendi

1. Reel kökler söz konusu olduğunda elde edilen değerler köklerin mutlak değerleridir. İşaretlerin belirlenmesi için Ara Değer Teoremi yardımı ile bir yöntem gösterilmiştir.
2. Değişken dönüşümü ve kompleks sayılar ile ilgili ek bilgiler verilmiştir.
3. Özgün örnekler eklenmiştir.

Gräffe yöntemine dair bazı çalışmalar

1. Carl Runge, *Praxis der gleichungen*. c. 14. (GJ Göschen, 1900), s.157-182.
2. Ralph Craig Huffer, "On Methods for Determining Complex Roots of Algebraic Equations." (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İllinois Üniversitesi, ABD, 1920), s.21-28.
3. Eric Harold Neville, “Numerical Equations with Complex Coefficients”, *The Mathematical Gazette,* c. 20, sayı 239, 1936, s. 178-181.
4. G. C. Best, “The Determination of Complex Zeros of a Polynomial” *The American Mathematical Monthly*, c. 54, sayı 5, 1947, s. 269-273.
5. G. C. Best, “Notes on the Graeffe Method of Root Squaring.” *The American Mathematical Monthly*, c. 56, s. 2, 1949, s. 91–94.

İleri Sorular

- Hamdi Efendi bu metni neden yazdı?
- Çağdaşı matematik tartışmalarında yeri
- Osmanlı eğitim sisteminde bu metin nerede duruyor?
- Bu metne tercüme demek doğru mu?

Teşekkürler.